

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT.

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

28. BAND 1. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 28. MÄRZ 1928)



BERLIN

VERLAG VON JULIUS SPRINGER

1928

QA1

M88

~~v. 28-29~~

Die

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

erscheint in zwanglosen Heften, die zu Bänden von 50 Bogen vereinigt werden

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung sowie durch die Verlagsbuchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden natürlich auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Die Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Schriftleitung. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift, etwaige Abbildungen auf einem besonderen Blatt gezeichnet, einzureichen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Der Text ist in lateinischer Schrift abzufassen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

SCHRIFTLEITUNG DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

K. Knopp, Tübingen, Neckarhalde 55,

L. Lichtenstein, Leipzig, Großgörschenstraße 3,

E. Schmidt, Berlin NW, Altonaerstr. 30,

I. Schur, Berlin-Schmargendorf, Ruhlaerstr. 14.

28. Band.

Inhalt:

1. Heft

	Seite
Delaunay, B., Vollständige Lösung der unbestimmten Gleichung $X^3q + Y^3 = 1$ in ganzen Zahlen	1
Nagell, Tr., Darstellung ganzer Zahlen durch binäre kubische Formen mit negativer Diskriminante	3
Neder, L., Über die mehrmalige gliedweise Differentiation unendlicher Reihen und Integrale	3
Neder, L., Eine Bemerkung über die Konkavitäts- und Minimumstellen der Funktionen	3
Liebermann, H., Die Sauersche Zellteilung des Raumes	3
Rothe, E., Ein Beitrag zum Cauchyschen Problem	4
Rogosinski, W., und G. Szegő, Über die Abschnitte von Potenzreihen, die in einem Kreise beschränkt bleiben	7
Funk, P., Bemerkung zu meiner Arbeit „Über den Begriff extreme Krümmung und eine kennzeichnende Eigenschaft der Ellipse“	9
Schatz, H., Über die Geometrie von Laguerre. IX. Begleitende Dupinsche Zykliken bei Streifen. W-Kugelscharen und W-Streifen	9
Slotnick, M. M., A Method of Applying Tensor Analysis to the Study of Rectilinear Congruences	10
Schmeidler, W., Grundlagen einer Theorie der algebraischen Funktionen mehrerer Veränderlichen. (Edmund Landau zum 50. Geburtstag gewidmet)	11
Hlavatý, V., Bemerkung zur Arbeit von Herrn T. Y. Thomas „A projective theory of affinely connected manifolds“	14
Szász, O., Über die Partialsummen der Binomialreihe	14
Blaschke, W., Topologische Fragen der Differentialgeometrie. I.	15
Blaschke, W., Topologische Fragen der Differentialgeometrie. II.	15

Vollständige Lösung der unbestimmten Gleichung $X^3 q + Y^3 = 1$ in ganzen Zahlen¹⁾.

Von

Boris Delaunay in Leningrad.

Wir geben in dieser Note eine vollständige Lösung in ganzen Zahlen X, Y der unbestimmten Gleichung

$$(1) \quad X^3 q + Y^3 = 1,$$

wo q eine beliebige gegebene ganze rationale Zahl ist. Die immer vorhandene Lösung $X=0, Y=1$ werden wir nicht in Betracht ziehen und trivial nennen.

§ 1.

Zurückführung des Problems auf die Auffindung von gewissen Einheiten.

Wir können annehmen, daß die ganze rationale Zahl q positiv und kein Kubus ist. Aus der Identität

$$X^3 q + Y^3 = (X \sqrt[3]{q} + Y)(X \zeta \sqrt[3]{q} + Y)(X \zeta^2 \sqrt[3]{q} + Y) \quad \left(\zeta = e^{\frac{2\pi i}{3}} \right)$$

sehen wir, daß einer jeden Lösung X, Y der Gleichung (1) eine positive²⁾ algebraische Einheit $X \sqrt[3]{q} + Y$ mit ganzzahligen X, Y entspricht, und umgekehrt entspricht einer jeden solchen positiven Einheit eine Lösung der Gleichung (1). Wir werden positive Einheiten von der Form $A(\sqrt[3]{q})^2 + B\sqrt[3]{q} + C$, wo A, B, C ganze Zahlen sind, d. h. die positiven Einheiten des Ringes

¹⁾ Der detaillierte Beweis des in dieser Note enthaltenen Satzes ist 1915 in russischer Sprache in vier Noten im Journal der Charkowschen Mathematischen Gesellschaft erschienen und dann noch einmal fast ohne Änderungen in den Memoiren der St. Petersburger Akademie der Wissenschaften 1922 wieder russisch abgedruckt worden. In dem Januarhefte von 1916 der C. R. wurde nur der Wortlaut des Theorems ganz ohne Beweis gegeben.

²⁾ Eine Einheit nennen wir positiv, wenn ihre Norm gleich 1 ist.

$[(\sqrt[3]{q})^2, \sqrt[3]{q}, 1]$, betrachten. Der Kürze wegen werden wir den Ring $[(\sqrt[3]{q})^2, \sqrt[3]{q}, 1]$ auch $O(\sqrt[3]{q})$ bezeichnen. Diejenigen unter diesen Einheiten, welche die Form $B\sqrt[3]{q} + C$ haben, d. h. die zweite Potenz von $\sqrt[3]{q}$ nicht enthalten, werden wir „binom“ nennen. Das Problem, die Gleichung (1) zu lösen, reduziert sich also auf die Aufsuchung aller binomen Einheiten des Ringes $O(\sqrt[3]{q})$.

§ 2.

Über die Einheiten im Ringe $O(\sqrt[3]{q})$.

Die Gleichung $x^3 = q$ hat eine reelle Wurzel und zwei imaginäre, man erhält also nach dem Dirichletschen Theorem alle Einheiten des Ringes $O(\sqrt[3]{q})$, indem man eine gewisse positive Fundamenteleinheit ε_0 und die ihr inverse $\eta_0 = \varepsilon_0^{-1}$ in alle Potenzen mit ganzen rationalen positiven Exponenten m erhebt. Diejenige von den zwei positiven Fundamenteleinheiten ε_0 und $\eta_0 = \varepsilon_0^{-1}$, welche den Ungleichungen $0 < \varepsilon_0 < 1$ genügt, werden wir *direkt*, und die andere η_0 , welche der Ungleichung $1 < \eta_0$ genügt, *invers* nennen. A. Markoff hat eine Tabelle der inversen Fundamenteleinheiten der Körper $\Omega(\sqrt[3]{q})$ für alle q , welche nicht größer als 70 sind, angegeben («Sur les nombres entiers dépendant d'une racine cubique d'un nombre entier ordinaire», Mémoires de l'Académie de St. Petersburg (7), 38 (1892)). Am Ende der Tabelle bemerkt Markoff: «Je suis persuadé que presque toutes ces unités sont Fondamentales.» Wir haben einige von den Markoffschen Einheiten geprüft; sämtliche Einheiten der folgenden Tabelle sind Fundamenteleinheiten der betreffenden Ringe.

$q=2$	$q-1$	14	$-q^2+2q+1$	26	$-q+3$
3	q^2-2	15	$12q^2-30q+1$	28	$q-3$
4	$-q^2+q+1$	17	$-7q+18$	30	$-3q^2+9q+1$
5	$2q^2-4q+1$	18	q^2-3q+1	35	$16q^2-45q-24$
6	$3q^2-6q+1$	19	$3q-8$	37	$-3q+10$
7	$-q+2$	20	$7q-19$	39	$2q^2-23$
9	$q-2$	21	$4q^2+6q-47$	43	$2q-7$
10	$-3q^2+6q+1$	22	$-4q^2+3q+23$	58	$2q^2-8q+1$
11	$-2q^2+4q+1$	23	$6230q^2-3160q-41399$	60	$3q^2-12q+1$
12	$6q^2+33q-107$	24	$3q^2-9q+1$	61	$4q^2-16q+1$
13	$2q^2-3q-4$	25	$-12932q^2+13870q+70011$	63	$-q+4$

Hier ist $\sqrt[3]{q} = q$ gesetzt. Alle diese Einheiten sind positiv und direkt.

Es sind Methoden bekannt, welche zwar ziemlich umständlich sind, dennoch aber die Fundamenteleinheit eines beliebigen kubischen Ringes sicher zu berechnen erlauben. Solche Methoden sind von Zolotareff (Magister-Dissertation, St. Petersburg 1869), Charve (Suppl. zum Bd. IX der

Ann. Sc. de l'École Norm. Sup. 1880), Minkowski (Ann. Sc. de l'École Norm. Sup. 13, 1896), Voronoï (Doktor-Dissertation, Warschau 1896, siehe auch meine Note in den C. R. 1924), Berwick (Proceedings of the London Math. Soc. 1913) angegeben worden.

§ 3.

Über die Potenzen der inversen positiven Fundamenteleinheit η_0 .

Bemerkung. Die Koeffizienten der positiven direkten Einheit sind nicht alle von demselben Vorzeichen, und einer von ihnen kann Null sein, dagegen sind die Koeffizienten der Potenzen der positiven inversen Einheit alle drei positiv und keiner von ihnen kann Null sein.

Beweis. Die Norm einer Zahl $u(\sqrt[3]{q})^2 + v\sqrt[3]{q} + w$ hat die Form $u^3q^2 + v^3q + w^3 - 3uvwq$. Wenn $A(\sqrt[3]{q})^2 + B\sqrt[3]{q} + C$ eine positive Einheit ist, so ist seine Norm gleich $+1$

$$(1) \quad A^3q^2 + B^3q + C^3 - 3ABCq = 1.$$

Die zu ihr inverse Einheit $A'(\sqrt[3]{q})^2 + B'\sqrt[3]{q} + C' = (A(\sqrt[3]{q})^2 + B\sqrt[3]{q} + C)^{-1}$ hat, wie sich leicht zeigen läßt, die Koeffizienten

$$(2) \quad A' = B^2 - AC; \quad B' = A^2q - BC; \quad C' = C^2 - ABq.$$

Man erhält leicht aus (1) und (2) die Gleichung

$$(3) \quad AB'q + A'Bq + CC' = 1.$$

Wir sehen aus (3), daß die Koeffizienten wenigstens einer von den beiden Einheiten nicht von demselben Vorzeichen sein können, weil $q > 1$ ist. Nehmen wir an, daß die Koeffizienten A, B, C nicht von demselben Vorzeichen sind, so werden wir zeigen, daß die Koeffizienten A', B', C' alle drei nicht Null sind und positiv sein müssen.

1. Sei $A = 0, B > 0, C < 0$; oder $A = 0, B < 0, C > 0$; oder $A > 0, B = 0, C < 0$; oder $A < 0, B = 0, C > 0$, dann sehen wir direkt aus (2), daß $A' > 0, B' > 0, C' > 0$ wird.

2. Sei $A > 0, B > 0, C < 0$, dann folgt aus (2) $A' > 0$ und $B' > 0$, und also aus (3) $C' > 0$.

3. Sei $A > 0, B < 0, C > 0$, dann folgt aus (2) $B' > 0$ und $C' > 0$, und also aus (3) $A' > 0$.

4. Sei endlich $A < 0, B > 0, C > 0$, dann folgt aus (2) $A' > 0$ und $C' > 0$, und also aus (3) $B' > 0$.

Alle anderen möglichen Fälle reduzieren sich auf diese.

Aus dieser Bemerkung folgt, daß die binomen Einheiten nur unter den Potenzen der positiven direkten Einheit ϵ_0 zu suchen sind.

§ 4.

Über die Potenzen von Einheiten von der Form $B\sqrt[3]{q} + C$ oder $A(\sqrt[3]{q})^2 + C$.

Theorem. Keine Potenz einer Einheit von der Form $B\sqrt[3]{q} + C$ oder von der Form $A(\sqrt[3]{q})^2 + C$ kann eine binome Einheit sein.

Wir haben also zu beweisen, daß beim Potenzieren von Einheiten der Form $B\sqrt[3]{q} + C$ oder $A(\sqrt[3]{q})^2 + C$ solche Einheiten $M(\sqrt[3]{q})^2 + P\sqrt[3]{q} + Q$ entstehen, bei denen $M \neq 0$ ist. In der Tat, wenn $(B\sqrt[3]{q} + C)^m$ oder $[A(\sqrt[3]{q})^2 + C]^m$ auf $M = 0$ führt, so bekommen wir eine der folgenden sechs Gleichungen:

$$\xi^\lambda + \xi^{\lambda-1} \cdot (C^3) \cdot \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + (C^3)^\lambda \cdot \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} = 0,$$

wenn m von der Form $m = 3\lambda + 2$ ist,

$$\xi^{\lambda-1} \cdot \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} + \xi^{\lambda-2} \cdot (C^3) \cdot \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + (C^3)^{\lambda-1} \cdot \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} = 0,$$

wenn m von der Form $m = 3\lambda + 1$ ist,

$$\xi^{\lambda-1} \cdot m + \xi^{\lambda-2} \cdot (C^3) \cdot \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + (C^3)^{\lambda-1} \cdot \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} = 0,$$

wenn m von der Form $m = 3\lambda$ ist.

Hierbei ist $\xi = B^3 q$ zu setzen. Handelt es sich ferner um die Potenz $(A(\sqrt[3]{q})^2 + C)^m$, so ergibt sich

$$\xi^\lambda \cdot m + \xi^{\lambda-1} \cdot (C^3) \cdot \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + (C^3)^\lambda \cdot m = 0,$$

wenn m von der Form $m = 3\lambda + 2$ ist,

$$\xi^\lambda + \xi^{\lambda-1} \cdot (C^3) \cdot \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + (C^3)^\lambda \cdot m = 0,$$

wenn m von der Form $m = 3\lambda + 1$ ist,

$$\xi^{\lambda-1} \cdot \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} + \xi^{\lambda-2} \cdot (C^3) \cdot \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + (C^3)^\lambda \cdot m = 0,$$

wenn m von der Form $m = 3\lambda$ ist.

In den letzten drei Gleichungen soll $\xi = A^3 q^2$ sein. Weil aber $B\sqrt[3]{q} + C$ und $A(\sqrt[3]{q})^2 + C$ Einheiten sind, haben wir die Gleichungen $B^3 q + C^3 = 1$, $A^3 q^2 + C^3 = 1$, aus welchen wir sehen, daß $B^3 q$ und $A^3 q^2$ gegen C relativ

prim sind, d. h. daß ξ und C relativ prim sind. Wenn wir $q > 2$ annehmen, so haben wir $|C| > 1$. Sei π ein Primfaktor von C , und nehmen wir an, daß in dem Koeffizienten der höchsten Potenz von ξ genau π^* aufgeht. Wir werden in jedem Binomialkoeffizienten der folgenden Glieder im Zähler die zwei ersten Faktoren, d. h. $m(m-1)$, und im Nenner die zwei letzten behalten und kürzen alle anderen Faktoren des Nenners mit den anderen Faktoren des Zählers, was man immer machen kann, weil $\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots k}$ für jedes $n > 0$ und $0 < k < n$ eine ganze Zahl ist. Das erste Glied ist genau durch π^* teilbar, und in den anderen ist die Potenz von π , welche verloren geht, weil π in den beiden beibehaltenen Faktoren des Nenners enthalten sein kann, kleiner als diejenige, welche aus der Potenz von C^3 hinzukommt. Denn selbst, wenn $\pi = 2$ ist, haben wir schon $\pi^3 > 5$, $\pi^6 > 8$, $\pi^9 > 11$ usw., alle Glieder sind also wenigstens durch π^{*+1} teilbar und das erste nur durch π^* ; die Gleichungen sind also unmöglich.

Für den Fall $q = 2$ ist dieser Beweis nicht stichhaltig, weil dann $|C| = 1$ sein kann, aber dieser Fall bezieht sich auf die Gleichung $2X^3 + Y^3 = 1$, welche schon durch Euler gelöst wurde; dieser zeigte nämlich, indem er sich der Fermatschen Methode „de la descente infinie ou indéfinie“ bediente, daß diese Gleichung außer den Lösungen $X = 0$, $Y = 1$; $X = 1$, $Y = -1$ keine anderen Lösungen weder in ganzen Zahlen noch in Brüchen hat. Das Theorem ist also auch für $q = 2$ richtig und ist also allgemein bewiesen.

§ 5.

Über das Quadrat einer Einheit.

Theorem. *Das Quadrat einer Einheit kann nicht eine binome Einheit sein.*

Beweis. Sei $M(\sqrt[3]{q})^2 + P\sqrt[3]{q} + Q$ eine Einheit, und sei ihr Quadrat von der Form $B\sqrt[3]{q} + C$, dann haben wir

$$(1) \quad M^3 q^2 + P^3 q + Q^3 - 3MPQq = 1$$

und

$$(2) \quad P^2 + 2MQ = 0.$$

Wir werden zeigen, daß die Gleichungen (1) und (2) keine gemeinschaftliche Lösung in ganzen Zahlen M, P, Q, q haben können. Aus (2) bekommen wir 1. $Q = \gamma^3$, $M = -2\alpha^2$, $P = \pm 2\alpha\gamma$, oder 2. $Q = -\gamma^3$, $M = 2\alpha^2$, $P = \pm 2\alpha\gamma$, oder 3. $Q = 2\gamma^2$, $M = -\alpha^2$, $P = \pm 2\alpha\gamma$, oder

4. $Q = -2\gamma^2$, $M = \alpha^2$, $P = \pm 2\alpha\gamma$. Indem wir das in (1) substituieren, bekommen wir

$$(3) \quad -8t^2 \pm 20t\gamma^3 + \gamma^6 = +1,$$

$$(4) \quad -8t^2 \pm 20t\gamma^3 + \gamma^6 = -1,$$

$$(5) \quad t^2 \pm 20t\gamma^3 - 8\gamma^6 = +1,$$

$$(6) \quad t^2 \pm 20t\gamma^3 - 8\gamma^6 = -1,$$

wenn wir $q\alpha^3$ mit t bezeichnen. Aus (3) erhalten wir $t = \frac{\pm 5\gamma^3 \pm \sqrt{27\gamma^6 - 2}}{4}$; $27\gamma^6 - 2$ soll also ein Quadrat sein, z. B. z^2 , d. h. $z^2 + 2 = \sigma^3$, wo $\sigma = 3\gamma^2$ ist, oder $(z + \sqrt{-2})(z - \sqrt{-2}) = \sigma^3$. Die Faktoren $z + \sqrt{-2}$ und $z - \sqrt{-2}$ können keinen gegen 2 relativ primen gemeinsamen Teiler haben, σ ist aber eine ungerade Zahl, die Zahlen $z + \sqrt{-2}$ und $z - \sqrt{-2}$ sind deshalb relativ prim und sind also Kuben von ganzen algebraischen Zahlen in $\Omega(\sqrt{-2})$ (in $\Omega(\sqrt{-2})$ gibt es nur eine Idealklasse, und die einzigen Einheiten sind $+1$ und -1). Alle ganzen Zahlen des Körpers $\Omega(\sqrt{-2})$ haben die Form $u + v\sqrt{-2}$, wo u und v ganze rationale Zahlen sind; wir haben also

$$z + \sqrt{-2} = (u + v\sqrt{-2})^3 = u^3 + 3u^2v\sqrt{-2} - 6uv^2 - 2v^3\sqrt{-2}.$$

Daraus ergibt sich $3u^2v - 2v^3 = v(3u^2 - 2v^2) = 1$, oder $v = \pm 1$, und folglich $3u^2 - 2 = \pm 1$ oder $u = \pm 1$, und also $z = u^3 - 6uv^2 = \pm 5$, woraus $\gamma = \pm 1$ oder $t = \frac{\pm 20 \pm 20}{16} = 0$ folgt. Wenn aber $t = 0$ ist, so haben wir $\alpha = 0$ und also $M = 0$, $P = 0$, was nicht möglich ist. Die Gleichung (3) ist also unmöglich.

Aus der Gleichung (4) würde $\gamma^6 \equiv -1 \pmod{4}$ folgen, was nicht angeht.

Die Gleichung (5) kann man auch so schreiben: $u^2 - 4 \cdot 27\gamma^6 = 1$, wenn man $t \pm 10\gamma^3 = u$ setzt, oder $\frac{u-1}{2} \cdot \frac{u+1}{2} = \sigma^3$, wo $\sigma = 3\gamma^2$ ist. Die Zahl u ist ungerade, die beiden Zahlen $\frac{u-1}{2}$ und $\frac{u+1}{2}$ sind also zwei konsekutive ganze Zahlen, welche alle beide Kuben sein sollen, eine von ihnen muß also 0 sein, und daher muß $\sigma = 0$, d. h. $\gamma = 0$ sein, was unmöglich ist.

Die Gleichung (6) liefert $t^2 \equiv -1 \pmod{4}$, was nicht zulässig ist.

Wir sehen also, daß alle vier Gleichungen (3), (4), (5) und (6), zu welchen die Gleichungen (1) und (2) führen, unmöglich sind; die Gleichungen (1) und (2) sind also ebenfalls unmöglich.

§ 6.

Über den Kubus einer Einheit.

Theorem. *Der Kubus einer Einheit kann nicht eine binome Einheit sein.*

Beweis. Sei $M(\sqrt[3]{q})^2 + P\sqrt[3]{q} + Q$ eine Einheit, d. h.

$$(1) \quad M^3 q^2 + P^3 q + Q^3 - 3MPQq = 1,$$

und sei $(M(\sqrt[3]{q})^2 + P\sqrt[3]{q} + Q)^3$ eine binome Einheit von der Form $B\sqrt[3]{q} + C$, d. h. der Koeffizient von $(\sqrt[3]{q})^2$

$$(2) \quad M^2 Pq + P^2 Q + MQ^2 = 0.$$

Wir werden die Unmöglichkeit der Koexistenz der Gleichungen (1) und (2) zeigen. Sei δ der größte gemeinsame Teiler von M und P ; Q ist gegen q und δ relativ prim, was man aus (1) sieht. Aus (2) sehen wir, daß $M = \delta^2 \cdot m$, $P = \delta p$ ist, wo p und m schon relativ prim sind, weil anders δ nicht der größte gemeinsame Teiler von M und P wäre. Dann bekommen wir aus (2) $-m^2 \delta^4 p \delta q = Q(p^2 \delta^2 + m \delta^2 Q)$, oder $-m^2 \delta^3 p q = Q(p^2 + m Q)$; m ist gegen p relativ prim, und also auch gegen $p^2 + m Q$. Wir haben also $Q = m^2 k$, oder $-m^2 \delta^3 p q = m^2 k(p^2 + m^3 k)$, oder $-p \delta^3 q = k(p^2 + m^3 k)$; k ist gegen δ und q relativ prim (weil k Teiler von Q ist), wir haben also $p = k \cdot s$, oder $-k s \delta^3 q = k(k^2 s^2 + m^3 k)$, oder $-s \delta^3 q = k(k s^2 + m^3)$; k ist gegen δ und q relativ prim, wir haben also $s = k \cdot e$, oder $-k e \delta^3 q = k(k^3 e^2 + m^3)$, oder $-e \delta^3 q = k^3 e^2 + m^3$; e ist aber Teiler von s und also auch von p , d. h. e ist relativ prim zu m und folglich ist $e = \pm 1$; wir bekommen also $\mp \delta^3 q = k^3 + m^3$, $M = m \delta^2$, $P = \pm k^2 \delta$, $Q = m^2 k$, $MPQ = \pm m^3 k^3 \delta^3$, oder, indem wir diese Ausdrücke in (1) substituieren, $m^3 \delta^6 q^2 \pm k^6 \delta^3 q + m^6 k^3 \mp 3 m^3 k^3 \delta^3 q = 1$; wir haben aber $\delta^3 = \mp \frac{k^3 + m^3}{q}$, also bekommen wir $m^3(m^3 + k^3)^2 - (m^3 + k^3)k^6 + m^6 k^3 + 3 m^3 k^3(m^3 + k^3) = 1$ oder, wenn wir $m^2 k = \lambda$, $m^3 - k^3 = \mu$ setzen,

$$(3) \quad 9\lambda^3 + \mu^3 = 1.$$

Die direkte positive Fundamentaleinheit des Ringes $O(\sqrt[3]{9})$ ist $\sqrt[3]{9} - 2$, d. h. sie ist schon binom, die Gleichung (3) hat folglich nach dem Theorem von § 4 nur eine nicht triviale Lösung $\lambda = 1$, $\mu = -2$, und noch die triviale Lösung $\lambda = 0$; $\mu = 1$. Der Fall $\lambda = 1$, $\mu = -2$ ist aber mit $m^2 k = \lambda$, $m^3 - k^3 = \mu$ unvereinbar, und der Fall $\lambda = 0$, $\mu = 1$ gibt $m = 0$ oder $k = 0$, d. h. $Q = 0$, was unmöglich ist.

§ 7.

Beweis des Fundamentaltheorems.

Wir haben also bewiesen, daß das Quadrat und der Kubus einer Einheit keine Lösungen geben können; wenn wir dasselbe für die fünfte Potenz beweisen wollten, so hätten wir zu zeigen, daß es keine solchen ganzen Zahlen M, P, Q, q geben kann, welche den beiden Gleichungen

$$M^3 q^2 + P^3 q + Q^3 - 3 MPQq = 1$$

und

$$5 M^4 Q q^2 + 10 M^3 P^2 q^2 + 30 M^2 P Q^2 q + 20 M P^2 Q q \\ + 5 M Q^4 + P^5 q + 10 P^2 Q^3 = 0$$

genügen. Diese Gleichungen sind schon ziemlich verwickelt, und man sieht nicht, wie man zum Ziele gelangen könnte. Wir haben daher die folgende spezielle Methode gefunden, welche es uns ermöglicht, nach allen in den vorhergehenden Paragraphen gemachten Vorbereitungen die vollständige Lösung unserer Gleichung (1), § 1 zu finden.

Sei $[a(\sqrt[3]{q})^2 + b\sqrt[3]{q} + c]^m = M(\sqrt[3]{q})^2 + P\sqrt[3]{q} + Q$, dann ist leicht zu sehen, daß

$$3(\sqrt[3]{q})^2 \cdot M = (a(\sqrt[3]{q})^2 + b\sqrt[3]{q} + c)^m + \zeta(a\zeta^2(\sqrt[3]{q})^2 + b\zeta\sqrt[3]{q} + c)^m \\ + \zeta^2(a\zeta(\sqrt[3]{q})^2 + b\zeta^2\sqrt[3]{q} + c)^m$$

ist, wo $\zeta = \sqrt[3]{1} = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Nehmen wir an, daß $M = 0$ sei. Wir werden die Fälle $m = 3\gamma + 2$ und $m = 3\gamma + 1$ separat betrachten, den Fall $m = 3\gamma$ haben wir wegen des Theorems des § 6 gar nicht zu untersuchen. Sei $m = 3\gamma + 2$ und $M = 0$; wir haben dann die Gleichung

$$(\zeta^2 a(\sqrt[3]{q})^2 + b\sqrt[3]{q} + \zeta c)^m + (\zeta a(\sqrt[3]{q})^2 + b\sqrt[3]{q} + \zeta^2 c)^m \\ = -(a(\sqrt[3]{q})^2 + b\sqrt[3]{q} + c)^m.$$

Nach dem Theorem von § 5 kann man m ungerade voraussetzen, dann soll

$$(\zeta^2 a(\sqrt[3]{q})^2 + b\sqrt[3]{q} + \zeta c) + (\zeta a(\sqrt[3]{q})^2 + b\sqrt[3]{q} + \zeta^2 c)$$

ein Teiler von $(a(\sqrt[3]{q})^2 + b\sqrt[3]{q} + c)^m$, d. h. eine Einheit sein; $-a(\sqrt[3]{q})^2 + 2b\sqrt[3]{q} - c$ ist also eine Einheit, d. h. wir haben $-a^3 q^2 + 8b^3 q - c^3 - 6abcq = \pm 1$, andererseits haben wir aber $a^3 q^2 + b^3 q + c^3 - 3abcq = 1$, woraus wir durch Addition $9bq(b^2 - ac) = 2$ oder $= 0$ bekommen; es ist folglich $b^2 - ac = 0$ oder $b = 0$; aber $b^2 - ac$ ist ein Koeffizient der „inversen“ Einheit und folglich, nach der

Bemerkung von § 2, $\neq 0$; es ist also $b = 0$, d. h. die Fundamenteinheit ist von der Form $a(\sqrt[3]{q})^2 + c$, und also kann nach § 4 nicht nur nicht ihre m -te, sondern auch keine andere Potenz von der Form $B\sqrt[3]{q} + C$ sein. Wenn $m = 3\gamma + 1$ und $M = 0$ ist, so haben wir

$$\begin{aligned} (a(\sqrt[3]{q})^2 + \zeta b\sqrt[3]{q} + \zeta^2 c)^m + (a(\sqrt[3]{q})^2 + \zeta^2 b\sqrt[3]{q} + \zeta c)^m \\ = -(a(\sqrt[3]{q})^2 + b\sqrt[3]{q} + c)^m, \end{aligned}$$

woraus wir ganz analog bekommen, daß $2a(\sqrt[3]{q})^2 - b\sqrt[3]{q} - c$ eine Einheit sein soll, und wenn wir dann analog $8a^3q^2 - b^3q - c^3 - 6abcq = \pm 1$ mit $a^3q^2 + b^3q + c^3 - 3abcq = 1$ vergleichen, so bekommen wir $9aq(a^2q - bc) = 2$ oder $= 0$. Hier ist wieder $a^2q - bc$ ein Koeffizient der „inversen“ Einheit und demnach nicht Null; wir haben also $a = 0$, d. h. die Fundamenteinheit ist von der Form $b\sqrt[3]{q} + c$, und also kann nach § 4 nicht nur nicht die m -te, sondern auch keine andere Potenz binom sein.

Wir sehen also, daß nur die Fundamenteinheit selbst eine Lösung sein kann.

Wenn wir also die Gleichung $X^3q + Y^3 = 1$ vollständig in ganzen Zahlen X, Y lösen wollen, genügt es die Fundamenteinheit des Ringes $O(\sqrt[3]{q})$ zu berechnen.

Fundamentaltheorem betreffend die Gleichung $X^3q + Y^3 = 1$. Die Gleichung $X^3q + Y^3 = 1$ kann, außer der trivialen Lösung $X = 0$; $Y = 1$, höchstens eine einzige Lösung haben. Sie hat nämlich, wenn die positive direkte Fundamenteinheit des Ringes $O(\sqrt[3]{q})$ die Form $b\sqrt[3]{q} + c$ hat, außer der trivialen noch die Lösung $X = b$, $Y = c$; wenn aber diese Fundamenteinheit nicht eine solche Form hat, so besitzt die Gleichung $X^3q + Y^3 = 1$ außer der trivialen keine anderen Lösungen.

(Eingegangen am 28. Juni 1925.)

Darstellung ganzer Zahlen durch binäre kubische Formen mit negativer Diskriminante.

Von

Trygve Nagell in Oslo (Norwegen).

§ 1.

In einer früheren Arbeit in dieser Zeitschrift* habe ich den folgenden Satz bewiesen:

Die unbestimmte Gleichung

$$(1) \quad Ax^3 + By^3 = C,$$

wo A, B und C ganze Zahlen sind, $C = 1$ oder $C = 3$, hat höchstens eine Lösung in ganzen nicht verschwindenden Zahlen x und y . (Eine einzige Ausnahme ist die Gleichung $2x^3 + y^3 = 3$, die genau zwei Lösungen hat.)

Ich will hier zeigen, wie man durch Verallgemeinerung der dort angewandten Methode den folgenden Satz beweisen kann:

Hauptsatz. *Es sei $f(x, y)$ eine irreduzible binäre kubische Form mit ganzzahligen Koeffizienten und mit negativer Diskriminante. Dann hat die unbestimmte Gleichung*

$$(2) \quad f(x, y) = 1$$

höchstens drei Lösungen in ganzen Zahlen x und y , von den folgenden drei Fällen abgesehen: 1. Wenn $f(x, y)$ gleich $x^3 + xy^2 + y^3$ oder einer damit äquivalenten Form ist, hat die Gleichung (2) genau vier Lösungen; z. B. hat die Gleichung

$$x^3 + xy^2 + y^3 = 1$$

genau die Lösungen: $x = 0, y = 1$; $x = 1, y = 0$; $x = 1, y = -1$; $x = -2, y = 3$.

* Vgl. T. Nagell, Über einige kubische Gleichungen mit zwei Unbestimmten, Math. Zeitschr. 24 (1925), S. 422.

2. Wenn $f(x, y)$ gleich $x^3 - x^2y + xy^2 + y^3$ oder einer damit äquivalenten Form ist, hat die Gleichung (2) genau vier Lösungen; z. B. hat die Gleichung

$$x^3 - x^2y + xy^2 + y^3 = 1$$

genau die Lösungen: $x = 0, y = 1$; $x = 1, y = 0$; $x = -1, y = 2$; $x = 56, y = -103$.

3. Wenn $f(x, y)$ gleich $x^3 - xy^2 + y^3$ oder einer damit äquivalenten Form ist, hat die Gleichung (2) genau fünf Lösungen; z. B. hat die Gleichung

$$x^3 - xy^2 + y^3 = 1$$

genau die Lösungen: $x = 0, y = 1$; $x = 1, y = 0$; $x = 1, y = 1$; $x = -1, y = 1$; $x = 4, y = -3$.

Zwei Formen heißen äquivalent, wenn sie durch eine ganzzahlige Substitution $x = au + bv, y = cu + dv$ mit der Determinante $ad - bc = \pm 1$ aus einander entstehen. Äquivalente Formen geben natürlich genau dieselbe Anzahl Lösungen für die Gleichung (2). (Lösungen mit $x = 0$ oder $y = 0$ werden hier in der Anzahl mitgerechnet.)

Herr Boris Delaunay hat im Jahre 1920 ohne Beweis eine Behauptung ausgesprochen, die beinahe mit meinem Satz zusammenfällt*; bei ihm fehlt aber der zweite Ausnahmefall.

Mein Satz über die Gleichung (1) ist offenbar in diesem Satze nicht enthalten.

Leider gibt die Methode im allgemeinen kein Mittel, um die eventuellen Lösungen wirklich zu bestimmen. Für die speziellere Gleichung (1) ist es mir jedoch gelungen, mit einer anderen Methode die Aufgabe vollständig zu lösen**.

§ 2.

Es genügt, den Satz für den Fall zu beweisen, daß der Koeffizient von x^3 gleich 1 ist. Denn ist $x = x_1$ und $y = y_1$ eine Lösung der Gleichung (2), so kann ich auf $f(x, y)$ die Substitution $x = x_1u + bv, y = y_1u + dv$, mit $x_1d - y_1b = \pm 1$, ausführen; dann bekommen wir die neue Form $g(u, v)$, in der der Koeffizient von u^3 gleich 1 ist. Da $f(x, y)$ und $g(u, v)$ äquivalent sind, hat die Gleichung $g(u, v) = 1$ genau so viele Lösungen wie (2).

Es sei nun

$$(3) \quad f(x, y) = x^3 + px^2y + qxy^2 + ry^3$$

* Siehe Comptes Rendus 171 (1920), S. 336.

** Siehe meine Arbeit, Solution complète de quelques équations cubiques à deux indéterminées, Journal de Mathématiques (9) 4 (1925), S. 209.

mit ganzzahligen Koeffizienten p , q und r . Dann ist die Diskriminante von $f(x, y)$ bekanntlich gleich

$$(4) \quad D = p^2 q^2 - 4q^3 - 4p^3 r - 27r^2 + 18pqr.$$

Nach der Voraussetzung soll D negativ sein. Äquivalente Formen haben offenbar dieselbe Diskriminante.

Es sei nun α die reelle, ganze algebraische Zahl, die Wurzel der irreduziblen Gleichung $f(x, -1) = 0$ ist.

Die Diskriminante von α ist durch (4) gegeben. Im kubischen Körper $K(\alpha)$ ist dann die Körperdiskriminante negativ. Es gibt folglich in jedem Ring im Körper nur eine Fundamenteleinheit. Fundamenteleinheiten werden in der Folge immer positiv und < 1 gewählt.

Die zu einer Zahl β von $K(\alpha)$ konjugierten Zahlen werden, wie üblich, mit β' und β'' bezeichnet. β' und β'' sind imaginär-konjugiert, und folglich ist $\beta'\beta''$ positiv. Die Norm von β ist $N(\beta) = \beta\beta'\beta''$; sie ist daher positiv, wenn β positiv ist, und negativ, wenn β es ist.

Die Gleichung (2) können wir so schreiben:

$$f(x, y) = (x + \alpha y)(x + \alpha' y)(x + \alpha'' y) = 1.$$

Die Aufgabe, diese Gleichung zu lösen, ist dann offenbar mit der anderen Aufgabe identisch: *Alle positiven Einheiten von der Form $x + \alpha y$ im kubischen Körper $K(\alpha)$ mit ganzen Zahlen x und y zu bestimmen. Es gibt genau so viele positive Einheiten $x + \alpha y$ wie Lösungen der Gleichung (2).*

Es sei ε die Fundamenteleinheit im Ringe $R(1, \alpha, \alpha^2)$ oder mit einer kürzeren Bezeichnung $R(\alpha)$. (ε wird so gewählt, daß $0 < \varepsilon < 1$.) Dann haben wir zu untersuchen, für welche ganzzahligen, positiven oder negativen Zahlen n

$$\varepsilon^n = x + \alpha y$$

ist. Eine triviale Lösung ist $n = 0$, $x = 1$, $y = 0$.

In der Folge bedeuten lateinische Buchstaben, wenn nichts anderes gesagt ist, ganze rationale Zahlen.

§ 3.

Es sei ε die Fundamenteleinheit in $R(\alpha)$ und

$$\varepsilon = a\alpha^2 + b\alpha + c$$

mit ganzen Zahlen a , b und c , und $0 < \varepsilon < 1$. Aus der Gleichung

$$(5) \quad \varepsilon^n = x + \alpha y$$

folgt nun

$$\varepsilon'^n = x + \alpha' y \quad \text{und} \quad \varepsilon''^n = x + \alpha'' y$$

oder

$$\varepsilon'^n - \varepsilon''^n = (\alpha' - \alpha'')y.$$

In allen Einheiten $x + \alpha y$ muß daher y durch die Zahl

$$\frac{\varepsilon' - \varepsilon''}{\alpha' - \alpha''} = a(\alpha' + \alpha'') + b = -a\alpha + b + ap$$

teilbar sein. (Wir haben nämlich wegen $\alpha^3 = p\alpha^2 - q\alpha + r$, $\alpha' + \alpha'' = p - \alpha$.) Wenn der größte gemeinsame Teiler von a und b gleich $d = (a, b)$ ist, müssen folglich alle y , da sie rational sind, durch die Zahl

$$k = \frac{1}{d^2} \cdot N(-a\alpha + b + ap)$$

teilbar sein. Wir können daher zu dem Ringe $R(k\alpha)$ übergehen und setzen $y_1 = \frac{y}{k}$ und $\alpha_1 = k\alpha$. Es sei $\alpha_1^3 = p_1\alpha_1^2 - q_1\alpha_1 + r_1$. Es sei ferner $\varepsilon_1 = \varepsilon^v$ die Fundamenteleinheit im neuen Ringe

$$\varepsilon_1 = a_1\alpha_1^2 + b_1\alpha_1 + c_1.$$

v ist gewiß eine ganze Zahl, da der Ring $R(\alpha_1)$ im Ringe $R(\alpha)$ enthalten ist. Die Gleichung (5) geht dann über in

$$\varepsilon^n = \varepsilon_1^{\frac{n}{v}} = x + \alpha_1 y_1.$$

Es sei nun $d_1 = (a_1, b_1)$ der größte gemeinsame Teiler von a_1 und b_1 ; dann folgt auf genau dieselbe Weise, daß alle y_1 durch die Zahl

$$k_1 = \frac{1}{d_1^2} \cdot N(-a_1\alpha_1 + b_1 + a_1p_1)$$

teilbar sind. Wir können folglich zu dem Ringe $R(\alpha_2)$ übergehen, wo $\alpha_2 = k_1\alpha_1$ ist. Auf diese Weise können wir fortsetzen, bis wir uns in einem Ringe $R(\alpha_i)$ mit $\alpha_i = k k_1 k_2 \dots k_{i-1} \alpha$ und $\alpha_i^3 = p_i\alpha_i^2 - q_i\alpha_i + r_i$ befinden. Die Fundamenteleinheit in $R(\alpha_i)$ sei

$$\varepsilon_i = \varepsilon^\mu = a_i\alpha_i^2 + b_i\alpha_i + c_i,$$

mit μ ganz ≥ 1 und $0 < \varepsilon_i < 1$. Statt der Gleichung (5) haben wir

$$(6) \quad \varepsilon_i^\mu = \varepsilon_i^N = x + \alpha_i y_i,$$

mit $y = k k_1 k_2 \dots k_{i-1} y_i$. Wenn $d_i = (a_i, b_i)$ ist, müssen die Zahlen y_i durch

$$k_i = \frac{1}{d_i^2} \cdot N(-a_i\alpha_i + b_i + a_i p_i)$$

teilbar sein. Da aber y nur endlich viele Teiler hat, muß einmal der Fall eintreffen, daß $k_i = \pm 1$ wird. (Wir sehen von dem Falle ab, daß die Gleichung (5) nur die einzige Lösung $n = 0$, $y = 0$ hat.) In dem Falle

muß $d_i = 1$ sein; und $-a_i \alpha_i + b_i + a_i p_i$ muß eine Einheit sein, und ist folglich, vom Vorzeichen abgesehen, eine Lösung der Gleichung (6).

Es sei zunächst $-a_i \alpha_i + b_i + a_i p_i = \pm 1$. Dann wird $a_i = 0$, $b_i = \pm 1$ und $\varepsilon_i = \pm \alpha_i + c_i$. Statt der Gleichung (6) können wir daher die Gleichung

$$\varepsilon_i^N = u + \varepsilon_i v$$

betrachten; sie hat genau so viele Lösungen wie die Gleichungen (5) und (6). Es sei darauf $-a_i \alpha_i + b_i + a_i p_i$ eine irrationale Einheit,

$$-a_i \alpha_i + b_i + a_i p_i = \pm \varepsilon_i^m = \pm (A + \alpha_i C).$$

Dann ist die Zahl

$$\varepsilon_i^{m+1} = \pm (a_i^2 q_i + a_i b_i p_i - a_i c_i + b_i^2) \alpha_i \pm (b_i c_i + a_i c_i p_i - a_i^2 r_i)$$

eine zweite Lösung der Gleichung (6). Auf $x + \alpha_i y_i$ führen wir nun die ganzzahlige Substitution $x = Au + Bv$, $y_i = Cu + Dv$ mit der Determinante $AD - BC = \pm 1$ aus. Die Gleichung (6) wird

$$(7) \quad \varepsilon_i^N = x + \alpha_i y_i = (A + \alpha_i C)(u + \beta v),$$

wo wir β für die ganze algebraische Zahl

$$\frac{B + \alpha_i D}{A + \alpha_i C} = (B + \alpha_i D) \cdot \varepsilon_i^{-m}$$

gesetzt haben. Es gibt offenbar genau so viele Einheiten $u + \beta v$ wie Einheiten $x + \alpha_i y_i$. (Die Ringe $R(\alpha_i)$ und $R(\beta)$ sind identisch, da α_i und β dieselbe Diskriminante haben. ε_i ist daher auch in $R(\beta)$ die Fundamenteinheit.) Aus der Gleichung (7) folgt für $N = m + 1$

$$\varepsilon_i^{m+1} = \varepsilon_i^m (u_1 + \beta v_1)$$

oder

$$u_1 + \beta v_1 = \varepsilon_i = a_i \alpha_i^2 + b_i \alpha_i + c_i.$$

Hieraus folgt, weil β eine Zahl im Ringe $R(\alpha_i)$ ist, und weil $(a_i, b_i) = 1$ ist, $v_1 = \pm 1$ und folglich $\varepsilon_i = \pm \beta + u_1$. Statt der Gleichung (7) können wir daher die Gleichung

$$\varepsilon_i^{N-m} = U + \varepsilon_i V$$

betrachten. Es gibt genau so viele Einheiten $U + \varepsilon_i V$ wie Einheiten $u + \beta v$ und wie Einheiten $x + \alpha y$. Das Ergebnis dieses Paragraphen ist daher:

Hilfssatz I. Um unseren Hauptsatz zu beweisen, genügt es, den Fall zu behandeln, daß die (reelle) Wurzel α der Gleichung $f(x, -1) = 0$ eine Einheit ist, und zwar die Fundamenteinheit im Ringe $R(\alpha)$ ist.*

Anmerkung. In der Folge bedeutet Einheit eine Einheit in einem kubischen Zahlkörper mit negativer Körperdiskriminante.

* Die Hilfssätze I und II stehen schon bei Delaunay in seiner Note in den Comptes Rendus.

§ 4.

Hilfssatz II. *Es sei $x + \alpha y$ eine Einheit mit $y \neq 0$. Besteht dann die Gleichung*

$$(8) \quad (x + \alpha y)^n = u + \alpha v,$$

mit ganzzahligem $n > 1$, so muß $y = \pm 1$ sein.*

(α bedeutet hier dieselbe ganze algebraische Zahl wie in den drei ersten Paragraphen.)

Beweis. Weil der Koeffizient von α^2 verschwindet, folgt aus der Gleichung (8) unter Anwendung von $\alpha^3 = p\alpha^2 - q\alpha + r$:

$$0 = \binom{n}{2} y^2 x^{n-2} + \binom{n}{3} y^3 x^{n-3} p + \sum_{k \geq 4} \binom{n}{k} y^k x^{n-k} t_k,$$

wo die t_k ganze Zahlen sind. Durch Division mit $\frac{1}{2}n(n-1)y^2$ folgt hieraus

$$0 = x^{n-2} + \frac{1}{3}(n-2)pyx^{n-3} + \sum_{k \geq 4} \binom{n-2}{k-2} \frac{2y^{k-2}}{(k-1)k} x^{n-k} t_k.$$

Es sei nun π ein Primteiler von y und $\pi > 3$. Dann ist die Summe $\equiv 0 \pmod{\pi}$; denn es ist für alle $k \geq 4$, $\pi^{k-2} \geq 5^{k-2} > k$. Das zweite Glied, $\frac{1}{3}(n-2)pyx^{n-3}$, ist auch $\equiv 0 \pmod{\pi}$; folglich muß auch x^{n-2} durch π teilbar sein. Dies ist aber unmöglich; denn x und y sind teilerfremd, da $x + \alpha y$ eine Einheit ist.

Wenn y durch 3 teilbar ist, so ist die Summe $\equiv 0 \pmod{3}$; denn für alle $k \geq 4$ ist $3^{k-2} > k$. Ist nun ferner y sogar durch 9 teilbar oder p durch 3 teilbar, so wird auch das zweite Glied $\equiv 0 \pmod{3}$ und daher auch $x \equiv 0 \pmod{3}$; diese Fälle sind daher unmöglich.

Wenn y gerade ist, so ist die Summe $\equiv 0 \pmod{2}$; denn für alle $k \geq 4$ ist $2^{k-1} > k$. Das zweite Glied ist dann gerade, und folglich auch x^{n-2} , was unmöglich ist.

Es bleibt nur übrig, zu beweisen, daß auch der Fall $y = \pm 3$ und p durch 3 unteilbar, unmöglich ist. Die Norm von $x + \alpha y$ ist gleich ± 1 , weil sie eine Einheit ist,

$$N(x \pm 3\alpha) = x^3 \pm 3px^2 + 9qx \pm 27r = \pm 1.$$

Es ist folglich $x \equiv \pm 1 \pmod{3}$ und $x^3 \equiv \pm 1 \pmod{9}$, was unmöglich ist, wenn p durch 3 unteilbar ist.

y kann daher keinen Primteiler haben, d. h. es ist $y = \pm 1$.

§ 5.

Hilfssatz III. *Es sei η eine Einheit, $0 < \eta < 1$. Dann ist $\eta^{-n} = x + \eta y$, mit $n \geq 1$, nur für $\eta^3 = 1 - \eta^2$ mit $\eta^{-2} = 1 + \eta$.*

Beweis. In der irreduziblen Gleichung von η ,

$$\eta^3 + a\eta^2 + b\eta + c = 0,$$

muß offenbar $c = -1$ sein. Denn die konjugierten Zahlen η' und η'' sind imaginär-konjugiert und daher ist $\eta'\eta'' > 0$. Nun ist η positiv; folglich $\eta\eta'\eta'' = -c = +1$. Wir müssen mehrere Fälle unterscheiden.

1. Es sei $\eta^3 = p\eta^2 - q\eta + 1$, mit p und q positiv. Hier muß $q \neq p$ sein; denn sonst wird die Gleichung in η reduzibel. Es muß sogar $q > p$ sein. Dies gilt für $p = 2$; denn $q = 1$ gibt $\eta^3 = 2\eta^2 - \eta + 1$ und folglich $\eta > 1$ gegen die Voraussetzung. Auch in den Fällen $p = 3$, $q = 1$ oder $q = 2$ bekommen wir ein $\eta > 1$. Es sei nun $p \geq 4$. Wir betrachten das Polynom in x und y

$$(x + y\eta')(x + y\eta'') = x^2 + xy(p - \eta) + \frac{1}{\eta}y^2 = \left(x + \frac{p - \eta}{2}y\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\eta^2 - \frac{1}{2}p\eta + q - \frac{1}{4}p^2\right)y^2.$$

Weil die Form definit ist, muß

$$\frac{3}{4}\eta^2 - \frac{1}{2}p\eta + q - \frac{1}{4}p^2 > 0,$$

oder

$$q > \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p\eta - \frac{3}{4}\eta^2 > \frac{1}{4}(p^2 - 3),$$

und wegen $p \geq 4$,

$$q > \frac{1}{4}(p^2 - 3) > p - 1,$$

und folglich

$$q \geq p + 1.$$

Nun ist

$$\eta^{-1} = \eta^2 - p\eta + q,$$

$$\eta^{-2} = q\eta^2 - (pq - 1)\eta + q^2 - p,$$

$$\eta^{-3} = (q^2 - p)\eta^2 - (pq^2 - p^2 - q)\eta + q^3 - 2pq + 1.$$

Wir setzen im allgemeinen

$$\eta^{-n} = A_n\eta^2 + B_n\eta + C_n.$$

Dann besteht offenbar für die A_n die Rekursionsformel

$$A_{n+3} = qA_{n+2} - pA_{n+1} + A_n.$$

Es ist $A_1 = 1$, $A_2 = q$ und $A_3 = q^2 - p$, also $A_3 > A_2 > A_1 > 0$. Nehmen wir nun an, daß

$$A_{n+2} > A_{n+1} > A_n > \dots > A_2 > A_1 > 0,$$

so folgt aus der Rekursionsformel wegen $q \geq p + 1$,

$$A_{n+3} > A_{n+2} + (q - 1 - p)A_{n+1} + A_n > A_{n+2}.$$

Der Koeffizient A_n von η^2 nimmt daher mit n immer zu und kann niemals verschwinden.

2. Es sei $\eta^3 = -p\eta^2 + q\eta + 1$, mit $p > 0$ und $q \geq 0$. Nach § 2 ist die Diskriminante von η gleich

$$D = 4p^3 + 4q^3 + p^2q^2 + 18pq - 27.$$

Diese Zahl ist aber, für $p > 0$, $q \geq 0$, nur dann negativ, wenn $q = 0$ und $p = 1$ ist. Dann ist $\eta^3 = 1 - \eta^2$, $\eta^{-1} = \eta^2 + \eta$, $\eta^{-2} = \eta + 1$, $\eta^{-3} = \eta^2 + \eta + 1$; in den folgenden Potenzen ist offenbar der Koeffizient von η^2 immer positiv.

3. Es sei $\eta^3 = -p\eta^2 - q\eta + 1$, mit $p \geq 0$ und $q > 0$. Dann ist $\eta^{-1} = \eta^2 + p\eta + q$, und in den folgenden Potenzen ist offenbar der Koeffizient von η^2 immer positiv.

Der Fall $\eta^3 = p\eta^2 + q\eta + 1$, mit $p \geq 0$ und $q \geq 0$, kommt offenbar nicht in Betracht, weil η der Voraussetzung nach < 1 ist.

Unser Hilfssatz ist damit bewiesen.

§ 6.

Hilfssatz IV. *Es sei η eine Einheit, $0 < \eta < 1$. Dann ist nur in den folgenden Fällen $1 - \eta$ eine Einheit: $\eta^3 = 1 - \eta^2$, $\eta^3 = 1 - \eta$, $\eta^3 = \eta^2 - 2\eta + 1$, $\eta^3 = 2\eta^2 - 3\eta + 1$, $\eta^3 = 3\eta^2 - 4\eta + 1$, $\eta^3 = 4\eta^2 - 5\eta + 1$.*

Beweis. Es sei $\eta^3 = p\eta^2 + q\eta + 1$. Weil $1 - \eta$ eine positive Einheit, so ist ihre Norm gleich $+1$, oder

$$N(1 - \eta) = 1 - p - q - 1 = 1,$$

folglich

$$p + q = -1.$$

Die Diskriminante von η wird dann

$$D = p^4 - 6p^3 + 7p^2 + 6p - 31.$$

Diese Zahl ist aber positiv für alle $p \geq 5$ und für alle $p \leq -2$. Die übrigen sechs Werte geben die Ausnahmen im Hilfssatz.

Hilfssatz V. *Es sei η eine Einheit, $0 < \eta < 1$, und $\eta^3 = p\eta^2 + q\eta + 1$ mit ungeradem p . Dann ist die Zahl $2\eta - 1$ nur in den folgenden Fällen eine Einheit: $\eta^3 = -\eta^2 - \eta + 1$ und $\eta^3 = \eta^2 - 2\eta + 1$.*

Beweis. Es sei zunächst $1 - 2\eta$ positiv; dann ist die Norm

$$N(1 - 2\eta) = 1 - 2p - 4q - 8 = 1,$$

was unmöglich ist für ungerades p . Es sei nun $2\eta - 1$ positiv; dann ergibt sich

$$N(2\eta - 1) = -1 + 2p + 4q + 8 = 1,$$

oder

$$p = -2q - 3.$$

Die Diskriminante von η wird dann

$$D = 4q^3 + q^2(2q + 3)^2 + 4(2q + 3)^3 + 18q(2q + 3) - 27.$$

Diese Zahl ist positiv für alle $q \geq 0$ und für alle $q \leq -6$. $q = -1$ gibt $\eta^3 = -\eta^2 - \eta + 1$; $q = -2$ gibt $\eta^3 = \eta^2 - 2\eta + 1$; $q = -3$ gibt die reduzible Gleichung $\eta^3 = 3\eta^2 - 3\eta + 1$; $q = -4$ gibt $\eta^3 = 5\eta^2 - 4\eta + 1$ mit $\eta > 1$; $q = -5$ gibt $\eta^3 = 7\eta^2 - 5\eta + 1$ mit $\eta > 1$.

§ 7.

Nach dem Hilfssatze I ist unsere Aufgabe auf die folgende reduziert: Wie viele (positive) Einheiten haben die Gestalt $a\eta + b$, wenn η die Fundamentaleinheit im Ringe $R(\eta)$ ist? (Wie bisher wird angenommen, daß $0 < \eta < 1$ ist.)

Wir wollen hier vorläufig von den Ausnahmewerten in den Hilfssätzen III, IV und V absehen; η ist also hier von den folgenden Zahlen verschieden:

$$\eta^3 = 1 - \eta^2, \quad \eta^3 = 1 - \eta, \quad \eta^3 = \eta^2 - 2\eta + 1, \quad \eta^3 = 2\eta^2 - 3\eta + 1, \\ \eta^3 = 3\eta^2 - 4\eta + 1, \quad \eta^3 = 4\eta^2 - 5\eta + 1 \quad \text{und} \quad \eta^3 = -\eta^2 - \eta + 1.$$

Diese Ausnahmезahlen haben entweder die Diskriminante $D = -23$ oder $D = -31$ oder $D = -44$. Wir werden dann zeigen, daß es außer den trivialen Fällen 1 und η höchstens eine positive Einheit $a\eta + b$ gibt. Nach dem Hilfssatze III muß in der Gleichung

$$\eta^m = a\eta + b$$

(wegen $0 < \eta < 1$) m positiv sein. Es sei $a\eta + b$ die erste unter den Potenzen

$$\eta^2, \eta^3, \eta^4, \dots,$$

die diese Form hat, und es sei

$$\eta^M = A\eta + B$$

eine zweite (von 1 und η verschiedene) Einheit von derselben Form. Dann ist $M > m$, also $M = nm + r$, mit $0 \leq r \leq m - 1$. Es sei ferner $\eta^3 = p\eta^2 + q\eta + 1$ die irreduzible Gleichung von η .

Die Zahlen a und b müssen teilerfremd sein, da $a\eta + b$ eine Einheit ist. Es ist $|a| \geq 2$; denn für $a = \pm 1$ würde sich ergeben $\eta^m = \pm \eta + b$, oder da $\eta < 1$ ist, $|b| < 2$; folglich müßte $a\eta + b = 1 - \eta$ sein. (Die Fälle $1 + \eta$, $-1 + \eta$, $-1 - \eta$ sind unmöglich wegen $0 < a\eta + b < 1$ und $0 < \eta < 1$.) Nach dem Hilfssatz IV ist aber $1 - \eta$ keine Einheit. Es sei $r = 0$. Dann ist m ein Teiler von M , und wir haben

$$(a\eta + b)^n = A\eta + B.$$

Nach dem Hilfssatze II müßte dann $a = \pm 1$ sein; es ist aber $|a| \geq 2$.

Es sei jetzt $r = 1$. Dann erhalten wir die Gleichung

$$(a\eta + b)^n \eta = A\eta + B.$$

Da hier der Koeffizient von η^2 verschwindet, ergibt sich unter Anwendung von $\eta^3 = p\eta^2 + q\eta + 1$

$$0 = \binom{n}{1} ab^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} p + \sum_{k \geq 3} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} t_k$$

mit ganzzahligem t_k . Durch Division mit na folgt hieraus

$$0 = b^{n-1} + \frac{1}{2}(n-1)ab^{n-2}p + \sum_{k \geq 3} \binom{n-1}{k-1} \frac{a^{k-1}}{k} b^{n-k} t_k.$$

Es sei a durch die ungerade Primzahl π teilbar. Dann ist die Summe $\equiv 0 \pmod{\pi}$; denn es ist $\pi^{k-1} \geq 3^{k-1} > k$ für alle $k \geq 3$. Das zweite Glied, $\frac{1}{2}(n-1)ab^{n-2}p$, ist auch $\equiv 0 \pmod{\pi}$. Folglich müßte $b^{n-1} \equiv 0 \pmod{\pi}$ sein; dies ist aber unmöglich, da a und b teilerfremd sind. Wenn a gerade ist, so ist die Summe $\equiv 0 \pmod{2}$; denn es ist $2^{k-1} > k$ für alle $k \geq 3$. Das zweite Glied ist gerade, wenn a durch vier teilbar ist, oder wenn p gerade ist. In diesem Falle würde auch $b^{n-1} \equiv 0 \pmod{2}$; aber b kann nicht gerade sein, wenn a es ist. Es bleibt nur der Fall $|a| = 2$ und p ungerade übrig. Dann wird $\eta^m = \pm 2\eta + b$ oder $|b| < 3$, folglich $a\eta + b = \pm(2\eta - 1)$. Dem Hilfssatz V zufolge ist aber die Zahl $2\eta - 1$ keine Einheit. Folglich muß $r > 1$ sein. Wir setzen

$$\varepsilon = \eta^r = x + y\eta + z\eta^2.$$

Hier ist $z \neq 0$, weil $1 < r < m$ ist. Dann haben wir

$$(a\eta + b)^n \cdot (x + y\eta + z\eta^2) = A\eta + B.$$

Der Koeffizient von η^2 muß verschwinden. Folglich ist

$$\begin{aligned} 0 &= x \left[\binom{n}{2} b^{n-2} a^2 + \binom{n}{3} b^{n-3} a^3 p + \dots \right] + \\ &+ y \left[\binom{n}{1} b^{n-1} a + \binom{n}{2} b^{n-2} a^2 p + \dots \right] + \\ &+ z \left[b^n + \binom{n}{1} b^{n-1} a p + \binom{n}{2} b^{n-2} a^2 t + \dots \right]. \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung folgt offenbar $zb^n \equiv 0 \pmod{a}$, oder da a und b teilerfremd sind,

$$(9) \quad z \equiv 0 \pmod{a}.$$

Es ist $r \geq 3$; denn wäre $r = 2$, so würde $\varepsilon = \eta^2$, $z = 1$ und wegen $z \equiv 0 \pmod{a}$, $a = \pm 1$; es ist aber $|a| \geq 2$. Es ist ferner $r \leq m - 2$.

Denn wäre $r = m - 1$ und $\varepsilon = \eta^{m-1}$, so würde

$$x + y\eta + z\eta^2 = \frac{a\eta + b}{\eta}$$

oder

$$x\eta + y\eta^2 + z\eta^3 = (zp + y)\eta^2 + (x + zq)\eta + z = a\eta + b,$$

folglich $b = z$, oder, da $z \equiv 0 \pmod{a}$ und a und b teilerfremd sind, $a = \pm 1$; es ist aber $|a| \geq 2$.

Aus der Gleichung

$$\varepsilon = x + y\eta + z\eta^3$$

folgt für die konjugierten Zahlen ε' und ε''

$$\varepsilon' = x + y\eta' + z\eta'^2,$$

$$\varepsilon'' = x + y\eta'' + z\eta''^2.$$

Hieraus folgt durch Elimination von x und y

$$z = \frac{(\eta' - \eta'')\varepsilon + (\eta - \eta')\varepsilon'' + (\eta'' - \eta)\varepsilon'}{(\eta' - \eta'')\eta^2 + (\eta - \eta')\eta''^2 + (\eta'' - \eta)\eta'^2},$$

oder

$$(10) \quad z = \pm \frac{1}{\sqrt{D}} [(\eta' - \eta'')\varepsilon + (\eta - \eta')\varepsilon'' + (\eta'' - \eta)\varepsilon'],$$

wo D die Diskriminante von η ist.

Nun gelten die Ungleichungen

$$(11) \quad \eta^3 \geq \varepsilon = \eta^r \geq \eta^{m-2},$$

und

$$(12) \quad |\varepsilon'| = |\varepsilon''| \leq |\eta'|^{m-2} = \left| \frac{a\eta' + b}{\eta'^2} \right| < \left| \frac{a}{\eta'} \right| + \left| \frac{b}{\eta'^2} \right|.$$

Aus $0 < a\eta + b < 1$ folgt nun

$$|b| < |a\eta| + 1 < |a| + 1.$$

$|b| = |a|$ ist offenbar nur für den Fall $|a| = 1$ möglich; folglich ist

$$|b| \leq |a| - 1$$

und

$$(13) \quad |\varepsilon'| = |\varepsilon''| < \left| \frac{a}{\eta'} \right| + \left| \frac{a-1}{\eta'^2} \right|.$$

Aus der Gleichung (10) folgt

$$(14) \quad |z\sqrt{D}| < 2|\eta'|\varepsilon + 2(1 + |\eta'|) \cdot |\varepsilon'|.$$

Unter Benutzung der Ungleichungen (11) und (13) ergibt sich hieraus

$$(15) \quad |z\sqrt{D}| < \frac{2}{|\eta'|^5} + 2\left(1 + \frac{1}{|\eta'|}\right)\left(|a| + \frac{|a|-1}{|\eta'|}\right),$$

und wegen $|\eta'| > 1$,

$$|z\sqrt{D}| < 8|a| - 2.$$

Wegen (9) ist nun aber $|z| \geq |a|$; folglich wird

$$|a| \sqrt[3]{D} < 8|a| - 2.$$

Diese Ungleichung kann aber nicht bestehen für $|\sqrt[3]{D}| \geq 8$. Unsere Behauptung ist folglich schon bewiesen für alle η mit einer negativen Diskriminante D , deren absoluter Betrag ≥ 64 ist. (Bei den Ausnahmehalten haben ja die Diskriminanten einen der Werte -23 , -31 oder -44 .)

§ 8.

Um unsere Behauptung auch für die Zahlen η mit Diskriminante > -64 zu beweisen, wollen wir den folgenden Hilfssatz beweisen:

Hilfssatz VI. *Es sei η eine Einheit, $0 < \eta < 1$. Dann ist immer $\eta < \frac{1}{2}$, wenn wir von den folgenden Ausnahmen absehen:*

$$\eta^3 = 1 - \eta^2, \quad \eta^3 = 1 - \eta, \quad \eta^3 = -\eta^2 - \eta + 1 \quad \text{und} \quad \eta^3 = \eta^2 - 2\eta + 1.$$

Die drei ersten Zahlen sind die größten Einheiten mit den Diskriminanten -23 , -31 und -44 ; sie sind daher die Fundamenteinheiten in ihren respektiven Zahlkörpern.

Beweis. Es sei zunächst $\eta^3 = -p\eta^2 - q\eta + 1$, mit positivem p und q ; wäre hier $\eta > \frac{1}{2}$, so müßte sein

$$1 = \eta^3 + p\eta^2 + q\eta > \frac{1}{8} + \frac{1}{4}p + \frac{1}{2}q.$$

Das ist aber nur möglich für $p = q = 1$, folglich $\eta^3 = -\eta^2 - \eta + 1$. Es sei ferner $\eta^3 = 1 - q\eta$, mit $q > 0$. Dann ist $1 - q\eta > 0$, oder, von dem Falle $q = 1$ abgesehen,

$$\eta < \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2}.$$

Es sei endlich $\eta^3 = p\eta^2 - q\eta + 1$, mit p und q positiv. Nach § 5 ist dann

$$(16) \quad q > \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p\eta - \frac{3}{4}\eta^2.$$

Es sei nun angenommen, daß $\eta > \frac{1}{2}$. Dann folgt

$$(17) \quad q > \frac{1}{4}(p^2 + p - 3).$$

Weiter ist

$$\eta^3 + q\eta = p\eta^2 + 1,$$

oder

$$p + 1 > p\eta^2 + 1 > \frac{1}{8} + \frac{1}{2}q \quad \text{oder} \quad q < 2p + \frac{7}{4},$$

folglich

$$(18) \quad q \leq 2p + 1.$$

Aus den Gleichungen (17) und (18) folgt

$$p^2 + p - 3 < 8p + 4$$

oder

$$\left(p - \frac{7}{2}\right)^2 < \frac{77}{4}.$$

p kann daher nur die folgenden Werte haben: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Ist $p = 1$, so muß nach (18) $q \leq 3$. $q = 1$ gibt eine reduzible Gleichung. $q = 2$ gibt $\eta^3 = \eta^2 - 2\eta + 1$ mit $\eta > \frac{1}{2}$. $q = 3$ gibt $\eta^3 = \eta^2 - 3\eta + 1$ mit $\eta < \frac{1}{2}$. Ist $p = 2$, so muß $q \leq 5$. $q = 1$ gibt $\eta^3 = 2\eta^2 - \eta + 1$ mit $\eta > 1$. $q = 2$ gibt eine reduzible Gleichung. $q = 3$ gibt $\eta^3 = 2\eta^2 - 3\eta + 1$ mit $\eta < \frac{1}{2}$. $q = 4$ und $q = 5$ geben auch ein $\eta < \frac{1}{2}$.

Ist $p = 3$, so muß nach den Ungleichungen (17) und (18) $q \geq 3$ und $q \leq 7$. $q = 3$ gibt eine reduzible Gleichung. $q = 4, 5, 6$ und 7 geben ein $\eta < \frac{1}{2}$.

Wenn $p = 4$, so muß nach (17) und (18) $q \geq 5$ und $q \leq 9$ sein. Wenn $p = 5$, so muß $q \geq 7$ und ≤ 11 sein. Ist $p = 6$, so muß $q \geq 10$ und ≤ 13 sein. Ist endlich $p = 7$, so muß $q \geq 14$ und ≤ 15 sein. In allen diesen Fällen findet man ein $\eta < \frac{1}{2}$.

Nach § 5 kann der Fall $\eta^3 = -p\eta^2 + q\eta + 1$ mit $p > 0$ und $q \geq 0$ nur für $p = 1$, $q = 0$ auftreten; dann ist $\eta^3 = 1 - \eta^2$ mit $\eta > \frac{1}{2}$.

Der Fall $\eta^3 = p\eta^2 + q\eta + 1$, mit $p \geq 0$ und $q \geq 0$, kommt nicht in Betracht, da $\eta < 1$ sein soll.

Unser Hilfssatz ist folglich bewiesen.

Nun können wir in der Ungleichung (15) $\eta < \frac{1}{2}$ und $|\eta'| > \sqrt{2}$ setzen, und wir bekommen

$$|z\sqrt{D}| < 0,4 + (\sqrt{2} + 1)^2 \cdot |a| - \sqrt{2} - 1,$$

oder wegen $|z| \geq |a|$

$$|a\sqrt{D}| < 6|a| - 2.$$

Diese Ungleichung ist aber unmöglich, wenn $|\sqrt{D}| \geq 6$ ist. Unsere Behauptung ist damit bewiesen für alle η mit einer Diskriminante $D \leq -36$, ausgenommen für $\eta^3 = -\eta^2 - \eta + 1$ mit $D = -44$.

Um weiter zu kommen, brauchen wir folgenden Hilfssatz:

Hilfssatz VII. *Es sei η eine Einheit, $0 < \eta < 1$, mit der Diskriminante D und $|D| < 36$. Ist dann $\eta > \frac{1}{9}$, so muß η einen der folgenden Werte haben: $\eta^3 = 1 - \eta^2$, $\eta^3 = \eta^2 - 2\eta + 1$, $\eta^3 = 2\eta^2 - 3\eta + 1$, $\eta^3 = -3\eta^2 - 2\eta + 1$, $\eta^3 = 4\eta^2 - 5\eta + 1$, $\eta^3 = 1 - \eta$, $\eta^3 = -2\eta^2 - \eta + 1$, $\eta^3 = 3\eta^2 - 4\eta + 1$ und $\eta^3 = -5\eta^2 - 6\eta + 1$.*

Beweis. Es sei zunächst $\eta^3 = -p\eta^2 - q\eta + 1$ mit $p \geq 0$ und $q > 0$. Ist hier $\eta > \frac{1}{9}$, so muß

$$1 = \eta^3 + p\eta^2 + q\eta > \frac{1}{81}p + \frac{1}{9}q$$

sein. Es ist folglich $q \leq 8$. Aus der Identität

$$(x + \eta'y)(x + \eta''y) = \left(x - \frac{p+\eta}{2}y\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\eta^2 + \frac{1}{2}p\eta + q - \frac{1}{4}p^2\right)y^2$$

folgt aber, genau wie in § 5, die Ungleichung

$$\frac{3}{4}\eta^2 + \frac{1}{2}p\eta + q - \frac{1}{4}p^2 > 0.$$

Nach dem Hilfssatze VI ist $\eta > \frac{1}{2}$ nur für $\eta^3 = 1 - \eta$. Für $\eta < \frac{1}{2}$ folgt aber

$$\frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{4}p - \frac{3}{16} < q \leq 8,$$

daher muß

$$p \leq 6$$

sein. Durch Prüfung dieser Werte von p und q ergibt sich, daß nur in den folgenden Fällen $|D| < 36$ ist: $\eta^3 = 1 - \eta$, $\eta^3 = -2\eta^2 - \eta + 1$, $\eta^3 = -3\eta^2 - 2\eta + 1$ und $\eta^3 = -5\eta^2 - 6\eta + 1$.

Es sei nun $\eta^3 = p\eta^2 - q\eta + 1$, mit positivem p und q . Nach dem Hilfssatz VI gilt nur für $\eta^3 = \eta^2 - 2\eta + 1$ die Ungleichung $\eta > \frac{1}{2}$. Wir können daher annehmen, daß $\frac{1}{9} < \eta < \frac{1}{2}$. Aus der Ungleichung (16) bekommen wir dann

$$(19) \quad q > \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{18}p - \frac{3}{16}.$$

Weiter folgt aus der Gleichung

$$\eta^3 + q\eta = p\eta^2 + 1$$

$$\frac{1}{4}p + 1 > p\eta^2 + 1 > \left(\frac{1}{9}\right)^3 + \frac{1}{9} \cdot q$$

oder

$$(20) \quad q < \frac{9}{4}p + 9.$$

Aus dieser Ungleichung und aus (19) ergibt sich

$$p^2 - \frac{79}{9}p < 37.$$

p kann daher höchstens gleich 11 sein. Wegen (20) bestehen auch für q nur endlich viele Möglichkeiten. Durch Prüfung dieser Werte findet man, daß nur die folgenden Zahlen η eine negative Diskriminante > -36 haben: $\eta^3 = \eta^2 - 2\eta + 1$, $\eta^3 = 2\eta^2 - 3\eta + 1$, $\eta^3 = 4\eta^2 - 5\eta + 1$ und $\eta^3 = 3\eta^2 - 4\eta + 1$. Unser Hilfssatz ist damit bewiesen.

Wenn es also überhaupt Einheiten η mit $|D| < 36$ gibt, die von den Ausnahmewerten im Hilfssatz VII verschieden sind, so muß $\eta < \frac{1}{9}$

sein, und $|\eta'| > 3$. Die Ungleichung (14) wird dann

$$|z \sqrt[3]{D}| < \frac{2}{243} + 2 \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(|a| + \frac{1}{3} |b|\right).$$

Nun ist $|b| < |a\eta| + 1 < \frac{1}{9} |a| + 1$, folglich

$$|z \sqrt[3]{D}| < \frac{8}{3} \cdot \frac{28}{27} \cdot |a| + 1.$$

Wegen $|z| \geq |a|$ wird

$$|a \sqrt[3]{D}| < 2,8 \cdot |a| + 1.$$

Da $|a| \geq 2$, ist diese Ungleichung unmöglich für $|\sqrt[3]{D}| > 3,3$, d. h. für $|D| \geq 11$. Unsere Behauptung ist damit bewiesen für alle η mit $|D| \geq 11$, jedoch mit Ausnahme der Fälle: $\eta^3 = 1 - \eta^2$, $\eta^3 = \eta^2 - 2\eta + 1$, $\eta^3 = -3\eta^2 - 2\eta + 1$, $\eta^3 = 3\eta^2 - 4\eta + 1$, $\eta^3 = 4\eta^2 - 5\eta + 1$, $\eta^3 = 1 - \eta$, $\eta^3 = -2\eta^2 - \eta + 1$, $\eta^3 = 2\eta^2 - 3\eta + 1$, $\eta^3 = -5\eta^2 - 6\eta + 1$ und $\eta^3 = -\eta^2 - \eta + 1$.

Nach Minkowski gibt es aber keinen kubischen Zahlkörper mit negativer Körperdiskriminante, deren absoluter Betrag < 12 ist*. Es bleiben daher jetzt nur diese zehn Ausnahmewerte zu behandeln. Das geschieht in den folgenden Paragraphen.

Anmerkung. Man könnte den Satz von Minkowski verschärfen und folgendes beweisen:

Es gibt nur vier kubische Zahlkörper mit negativer Körperdiskriminante Δ und $|\Delta| < 64$, nämlich die durch die folgenden Zahlen ε definierten Körper: 1. $\varepsilon^3 = 1 - \varepsilon^2$ mit $D = \Delta = -23$; 2. $\varepsilon^3 = 1 - \varepsilon$ mit $D = \Delta = -31$; 3. $\varepsilon^3 = -\varepsilon^2 - \varepsilon + 1$ mit $D = \Delta = -44$; 4. $\varepsilon^3 = 1 - 2\varepsilon$ mit $D = \Delta = -59$. Diese Zahlen ε sind auch die Fundamenteinheiten in den entsprechenden Körpern und in den entsprechenden Ringen $R(\varepsilon)$.

Hiernach war unser Hauptsatz, von diesen vier Ausnahmefällen abgesehen, eigentlich schon mit dem § 7 bewiesen. Hätten wir diesen Satz bewiesen, so wäre § 8 überflüssig gewesen. Der Beweis dieses Satzes ist aber sehr lang und kompliziert; die Überlegungen in § 8 führen viel schneller zum Ziel.

§ 9.

Wir wollen jetzt die Ausnahmefälle $\eta^3 = 1 - \eta^2$, $\eta^3 = \eta^2 - 2\eta + 1$, $\eta^3 = 2\eta^2 - 3\eta + 1$, $\eta^3 = -3\eta^2 - 2\eta + 1$ und $\eta^3 = 4\eta^2 - 5\eta + 1$ behandeln. Diese Zahlen η haben alle die Diskriminante -23 . Bezeichnen wir sie der Reihe nach mit ε , ε_2 , ε_3 , ε_4 und ε_5 , so ergibt sich leicht $\varepsilon_2 = \varepsilon^2$, $\varepsilon_3 = \varepsilon^3$, $\varepsilon_4 = \varepsilon^4$ und $\varepsilon_5 = \varepsilon^5$. Da alle diese Zahlen dieselbe Dis-

* Minkowski, Geometrie der Zahlen, S. 135.

kriminante haben, so ist der Ring $R(\varepsilon_i)$ für $i = 2, 3, 4$ und 5 mit $R(\varepsilon)$ identisch; und ε ist die Fundamenteleinheit im Ringe, da sie nach dem Hilfssatze VI die Fundamenteleinheit im entsprechenden Körper ist. Wir haben also zu bestimmen, wieviele Einheiten von der Form $a\varepsilon + b$ existieren, wenn $\varepsilon^3 = 1 - \varepsilon^2$ ist. Es gilt

$$\begin{aligned}\varepsilon^{-2} &= \varepsilon + 1, & \varepsilon^{-1} &= \varepsilon^2 + \varepsilon, & \varepsilon^3 &= 1 - \varepsilon^2, & \varepsilon^4 &= \varepsilon^2 + \varepsilon - 1, & \varepsilon^5 &= 1 - \varepsilon, \\ \varepsilon^6 &= -\varepsilon^2 + \varepsilon, & \varepsilon^7 &= 2\varepsilon^2 - 1, & \varepsilon^8 &= -2\varepsilon^2 - \varepsilon + 2, & \varepsilon^9 &= \varepsilon^2 + 2\varepsilon - 2, \\ \varepsilon^{10} &= \varepsilon^2 - 2\varepsilon + 1, & \varepsilon^{11} &= -3\varepsilon^2 + \varepsilon + 1, & \varepsilon^{12} &= 4\varepsilon^2 + \varepsilon - 3, \\ \varepsilon^{13} &= -3\varepsilon^2 - 3\varepsilon + 4, & \varepsilon^{14} &= 4\varepsilon - 3.\end{aligned}$$

Wegen des Hilfssatzes III ist in $\varepsilon^n = a\varepsilon + b$ der Exponent n nur dann negativ, wenn $n = -2$ wird. Wir wollen zeigen, daß ε^{14} die höchste Potenz von ε , die von der Form $a\varepsilon + b$ ist. Es sei nämlich

$$\varepsilon^M = A\varepsilon + B$$

mit $M > 14$, und $M = 14n + r$, mit $0 \leq r \leq 13$.

$r = 0$ ist unmöglich; denn dann wäre (mit $n > 1$)

$$(4\varepsilon - 3)^n = A\varepsilon + B,$$

was wegen des Hilfssatzes II unmöglich ist.

Es sei $r = 1$. Dann erhalten wir die Gleichung

$$(4\varepsilon - 3)^n \cdot \varepsilon = A\varepsilon + B,$$

folglich

$$0 = \binom{n}{1} 4 \cdot (-3)^{n-1} - \binom{n}{2} 4^2 \cdot (-3)^{n-2} + \sum_{k \geq 3} \binom{n}{k} 4^k \cdot (-3)^{n-k} \cdot t_k$$

oder durch Division mit $4n$

$$0 = (-3)^{n-1} - 2(n-1) \cdot (-3)^{n-2} + \sum_{k \geq 3} \binom{n-1}{k-1} \frac{4^{k-1}}{k} \cdot (-3)^{n-k} \cdot t_k.$$

Hier ist die Summe $\equiv 0 \pmod{2}$; denn es ist $4^{k-1} > k$, wenn $k \geq 3$.

Die Gleichung ist mithin unmöglich, da das erste Glied ungerade ist.

Es sei darauf $r = 5$. Dann erhalten wir die Gleichung

$$(4\varepsilon - 3)^n \cdot (1 - \varepsilon) = A\varepsilon + B,$$

folglich

$$\begin{aligned}\binom{n}{1} 4 \cdot (-3)^{n-1} - \binom{n}{2} 4^2 \cdot (-3)^{n-2} + \sum_{k \geq 3} \binom{n}{k} 4^k \cdot (-3)^{n-k} \cdot t_k \\ = \binom{n}{2} 4^2 \cdot (-3)^{n-2} + \sum_{k \geq 3} \binom{n}{k} 4^k \cdot (-3)^{n-k} \cdot t'_k.\end{aligned}$$

Auf genau dieselbe Weise wie vorhin beweist man, daß auch diese Gleichung unmöglich ist.

Es sei nun r von 0, 1 und 5 verschieden; dann ist

$$\varepsilon^r = x + y\varepsilon + z\varepsilon^2$$

mit $z \neq 0$. Aus der Gleichung

$$(4\varepsilon - 3)^n \cdot (x + y\varepsilon + z\varepsilon^2) = A\varepsilon + B$$

folgt nun

$$\begin{aligned} 0 = & x \left[\binom{n}{2} (-3)^{n-2} \cdot 4^2 - \binom{n}{3} (-3)^{n-3} \cdot 4^3 + \dots \right] \\ & + y \left[\binom{n}{1} (-3)^{n-1} \cdot 4 - \binom{n}{2} (-3)^{n-2} \cdot 4^2 + \dots \right] \\ & + z \left[(-3)^n - \binom{n}{1} (-3)^{n-1} \cdot 4 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Danach muß $z \equiv 0 \pmod{4}$ sein. Dann folgt $r = 12$ und

$$A\varepsilon + B = (4\varepsilon - 3)^n \cdot \varepsilon^{12} = (4\varepsilon - 3)^{n+1} \cdot \varepsilon^{-2}$$

oder, wenn $n+1 = m$,

$$(4\varepsilon - 3)^m = A + (B - A)\varepsilon^2,$$

also

$$0 = \binom{m}{1} \cdot 4 \cdot (-3)^{m-1} + \sum_{k \geq 4} \binom{m}{k} \cdot 4^k \cdot (-3)^{m-k} \cdot t_k.$$

Durch Division mit $4m$ ergibt sich hieraus

$$0 = (-3)^{m-1} + \sum_{k \geq 4} \binom{m-1}{k-1} \frac{4^{k-1}}{k} \cdot (-3)^{m-k} \cdot t_k.$$

Die Summe ist hier $\equiv 0 \pmod{2}$, weil $4^{k-1} > k$, wenn $k \geq 4$. Die Gleichung ist also unmöglich.

Es existieren demnach genau fünf (positive) Einheiten von der Form $a\varepsilon + b$, nämlich: 1, $1 + \varepsilon$, ε , $1 - \varepsilon$ und $4\varepsilon - 3$.

§ 10.

Wir wollen nun die Ausnahmefälle $\eta^3 = 1 - \eta$, $\eta^3 = -2\eta^2 - \eta + 1$, $\eta^3 = 3\eta^2 - 4\eta + 1$ und $\eta^3 = -5\eta^2 - 6\eta + 1$ behandeln. Diese Zahlen η haben alle die Diskriminante -31 . Bezeichnen wir sie der Reihe nach mit ε , ε_2 , ε_3 und ε_5 , so ergibt sich leicht $\varepsilon_2 = \varepsilon^2$, $\varepsilon_3 = \varepsilon^3$ und $\varepsilon_5 = \varepsilon^5$. Da alle vier Zahlen dieselbe Diskriminante haben, so sind die Ringe $R(\varepsilon_i)$ für $i = 2, 3$ und 5 , mit $R(\varepsilon)$ identisch; und ε ist die Fundamenteleinheit in $R(\varepsilon)$, da sie nach dem Hilfssatze VI die Fundamenteleinheit im entsprechenden Körper ist. Wir müssen also bestimmen, wie viele Einheiten von der Form $a\varepsilon + b$ existieren, wenn $\varepsilon^3 = 1 - \varepsilon$ ist. Wir haben

$$\begin{aligned} \varepsilon^4 &= -\varepsilon^3 + \varepsilon, & \varepsilon^5 &= \varepsilon^2 + \varepsilon - 1, & \varepsilon^6 &= \varepsilon^2 - 2\varepsilon + 1, \\ \varepsilon^7 &= -2\varepsilon^2 + 1, & \varepsilon^8 &= 3\varepsilon - 2. \end{aligned}$$

Wegen des Hilfssatzes III ist niemals $\varepsilon^n = a\varepsilon + b$, wenn n negativ ist. Wir wollen zeigen, daß ε^8 die höchste Potenz von ε von der Form $a\varepsilon + b$ ist. Es sei nämlich

$$\varepsilon^M = A\varepsilon + B$$

mit $M > 8$, und $M = 8n + r$, mit $0 \leq r \leq 7$.

$r = 0$ ist unmöglich; denn dann wäre (mit $n > 1$)

$$(3\varepsilon - 2)^n = A\varepsilon + B$$

dem Hilfssatze II zuwider.

Es sei $r = 1$. Dann erhalten wir die Gleichung

$$(3\varepsilon - 2)^n \cdot \varepsilon = A\varepsilon + B,$$

folglich

$$0 = \binom{n}{1} \cdot 3 \cdot (-2)^{n-1} + \sum_{k \geq 3} \binom{n}{k} \cdot 3^k \cdot (-2)^{n-k} \cdot t_k,$$

oder durch Division mit $3n$

$$0 = (-2)^{n-1} + \sum_{k \geq 3} \binom{n}{k} \frac{3^{k-1}}{k} \cdot (-2)^{k-1} \cdot t_k.$$

Hier ist die Summe $\equiv 0 \pmod{3}$, weil $3^{k-1} > k$, wenn $k \geq 3$. Die Gleichung ist somit unmöglich, da das erste Glied nicht durch 3 teilbar ist.

Es sei ferner $r = 3$. Dann erhalten wir die Gleichung

$$(3\varepsilon - 2)^n \cdot (1 - \varepsilon) = A\varepsilon + B,$$

also

$$\begin{aligned} & \binom{n}{1} \cdot 3 \cdot (-2)^{n-1} + \sum_{k \geq 3} \binom{n}{k} \cdot 3^k \cdot (-2)^{n-k} \cdot t_k \\ &= \binom{n}{2} 3^2 \cdot (-2)^{n-2} + \sum_{k \geq 4} \binom{n}{k} \cdot 3^k \cdot (-2)^{n-k} \cdot t'_k. \end{aligned}$$

Auf genau dieselbe Weise wie vorhin folgt, daß auch diese Gleichung unmöglich ist.

Es sei nun r von 0, 1 und 3 verschieden, und es sei

$$\varepsilon^r = x + y\varepsilon + z\varepsilon^2$$

mit $z \neq 0$. Aus der Gleichung

$$(3\varepsilon - 2)^n \cdot (x + y\varepsilon + z\varepsilon^2) = A\varepsilon + B$$

ergibt sich dann

$$\begin{aligned} 0 &= x \left[\binom{n}{2} \cdot (-2)^{n-2} \cdot 3^2 + \binom{n}{4} \cdot (-2)^{n-4} \cdot 3^4 \cdot t_1 + \dots \right] \\ &+ y \left[\binom{n}{1} \cdot (-2)^{n-1} \cdot 3 + \binom{n}{3} \cdot (-2)^{n-3} \cdot 3^3 \cdot t_2 + \dots \right] \\ &+ z \left[(-2)^n + \binom{n}{2} \cdot (-2)^{n-2} \cdot 3^2 \cdot t_3 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Folglich muß $z \equiv 0 \pmod{3}$. Das ist aber niemals der Fall, wenn $r = 2, 4, 5, 6$ oder 7 ist.

Es existieren daher genau vier Einheiten von der Form $a\varepsilon + b$, nämlich: $1, \varepsilon, 1 - \varepsilon$ und $3\varepsilon - 2$.

§ 11.

Der letzte Ausnahmefall ist $\eta^3 = -\eta^2 - \eta + 1$ mit der Diskriminante -44 . Hier ist

$$\eta^4 = 2\eta - 1$$

und

$$\eta^{17} = -103\eta + 56.$$

Es ist leicht nachzurechnen, daß η^n nicht von der Form $a\eta + b$ ist, wenn $5 \leq n \leq 16$. Wir wollen zeigen, daß η^{17} die höchste Potenz von η ist, welche die Form $a\eta + b$ hat.

Es sei nämlich

$$\eta^M = A\eta + B$$

mit $M > 17$ und $M = 17n + r$, mit $0 \leq r \leq 16$. $r = 0$ ist unmöglich; denn dann wäre

$$(-103\eta + 56)^n = A\eta + B$$

dem Hilfssatze II zuwider. Es sei $r = 1$. Dann wird

$$(-103\eta + 56)^n \cdot \eta = A\eta + B,$$

folglich

$$0 = -\binom{n}{1} \cdot 56^{n-1} \cdot 103 + \sum_{k \geq 2} \binom{n}{k} \cdot 56^{n-k} \cdot (-103)^k \cdot t_k.$$

Daß diese Gleichung unmöglich ist, wird genau so wie im vorigen Paragraphen bewiesen.

Wenn $r = 4$ ist, erhalten wir die Gleichung

$$(-103\eta + 56)^n \cdot (2\eta - 1) = A\eta + B,$$

folglich

$$\begin{aligned} & -2\binom{n}{1} \cdot 56^{n-1} \cdot 103 + 2 \sum_{k \geq 2} \binom{n}{k} \cdot 56^{n-k} \cdot (-103)^k \cdot t_k \\ & - \binom{n}{2} \cdot 56^{n-2} \cdot (103)^2 + \sum_{k \geq 3} \binom{n}{k} \cdot 56^{n-k} \cdot (-103)^k \cdot t'_k. \end{aligned}$$

Auf dieselbe Weise wie bisher beweist man, daß auch diese Gleichung unmöglich ist.

Es sei endlich r von 0, 1 und 4 verschieden, und es sei

$$\eta^r = x + y\eta + z\eta^2$$

mit $z \neq 0$. Dann folgt aus der Gleichung

$$(-103\eta + 56)^n \cdot (x + y\eta + z\eta^2) = A\eta + B$$

ganz genau wie früher

$$z \equiv 0 \pmod{103}.$$

Dies ist aber unmöglich; denn in der Gleichung

$$\eta^r = A_r \eta^2 + B_r \eta + C_r$$

ist für $5 \leq r \leq 16$ immer $|A_r| \leq 56$. Die Zahlen A_r genügen nämlich der Rekursionsformel

$$A_{r+3} = -A_{r+2} - A_{r+1} + A_r.$$

Nun ist $A_1 = 0$, $A_2 = 1$ und $A_3 = -1$, folglich $A_4 = 0$, $A_5 = 2$, $A_6 = -3$, $A_7 = 1$, $A_8 = 4$, $A_9 = -8$, $A_{10} = 5$, $A_{11} = 7$, $A_{12} = -20$, $A_{13} = 18$, $A_{14} = 9$, $A_{15} = -47$, $A_{16} = 56$.

Es existieren daher genau vier positive Einheiten von der Form $a\eta + b$ nämlich: 1 , η , $2\eta - 1$ und $-103\eta + 56$.

Unser Hauptsatz ist damit vollständig bewiesen.

§ 12.

Es sei N eine beliebige ganze von Null verschiedene Zahl. Dann können wir auch eine obere Grenze für die Anzahl der ganzzahligen Lösungen x und y der Gleichung

$$(21) \quad f(x, y) = N$$

angeben, wo $f(x, y)$ eine irreduzible binäre kubische Form mit ganzzahligen Koeffizienten und negativer Diskriminante ist.

Es sei nämlich ν die Anzahl der inkongruenten Lösungen der Kongruenz

$$f(x, 1) \equiv 0 \pmod{N}.$$

Nach Lagrange* wird dann die Lösung von (21) zurückgeführt auf die Lösung von höchstens ν Gleichungen

$$g(u, v) = 1,$$

wo $g(u, v)$ irreduzible binäre kubische Formen mit ganzzahligen Koeffizienten und negativer Diskriminante sind, und jede Lösung von den neuen Gleichungen gibt genau eine Lösung von (21). Nach unserem Hauptsatz folgt daher:

Die Gleichung (21) hat höchstens 5ν Lösungen und im allgemeinen weniger als 3ν Lösungen.

Diese Abschätzung kann man jedoch verschärfen in dem Falle, daß $N \neq \pm 1$ ist; ich werde aber darauf hier nicht weiter eingehen.

* Lagrange, Oeuvres, tome II, p. 265.

Über die mehrmalige gliedweise Differentiation unendlicher Reihen und Integrale.

Von

Ludwig Neder in Münster i. W.

Herr Landau hat vor einiger Zeit¹⁾ den klassischen Satz über die einmalige gliedweise Differentiation unendlicher Reihen verallgemeinert wie folgt:

Satz 2. Im Intervall $a < x < b$ seien $f_1(x), f_2(x), \dots$ reelle, k -mal differentiierbare Funktionen von x . Ferner sei daselbst

$$\sum f_v(x) \text{ konvergent, } = F(x),$$

sowie

$$(1) \quad \sum f_v^{(k)}(x) \text{ gleichmäßig konvergent.}$$

Dann ist $F(x)$ im Intervall k -mal differentiierbar, und

$$F^{(k)}(x) = \sum f_v^{(k)}(x).$$

Nachdem ich Gelegenheit hatte, die Nützlichkeit dieses Satzes zu erproben²⁾, möchte ich hier dessen Übertragung auf Funktionen von mehreren Veränderlichen diskutieren.

Zuvor aber will ich für den Landauschen Satz einen anderen Beweis mitteilen, der darauf ausgeht, die gleichmäßige Konvergenz der $k-1$ -, $k-2$ -, $\dots$, 1 - (und 0 -) mal differentiierten Reihe zu zeigen (vgl. Satz 1), so daß dann der Landausche Satz durch k -malige Anwendung des klassischen Satzes erhalten werden kann. Diese Beweisaneinanderordnung läßt

¹⁾ Über mehrfache gliedweise Differentiation unendlicher Reihen [Archiv d. Math. u. Phys. (3), 26 (1917), S. 69–70].

²⁾ Z. B. bei der ersten Randwertaufgabe der Wärmeleitungstheorie, wo man zwecks Verifikation der Gleichung $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ die Existenz und den Wert von $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ durch zweimalige gliedweise Differentiation der in Reihenform angesetzten Lösung erhalten will.

sich nämlich auf mehrere Veränderliche besonders leicht übertragen (vgl. Satz 4 und 5). —

Wir stützen uns auf folgende einfache Hilfsbetrachtung: Ist $|f(x)| < \delta$ in zwei Punkten $x = \alpha, \beta$ und dazwischen $f'(x)$ vorhanden, so ist nach dem Mittelwertsatz in einem passenden Zwischenpunkte ξ

$$|f'(\xi)| = \left| \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \right| < \frac{2\delta}{\beta - \alpha}.$$

Daher ist, wenn $|f(x)| < \delta$ in k Punkten $x = x_1, \dots, x_k$ mit Abstand $\geq 2A$ und „dazwischen“ $f^{(k-1)}(x)$ existiert, in einem passenden Zwischenpunkte ξ

$$(2) \quad |f^{(k-1)}(\xi)| < \delta |A|^{k-1}.$$

Mit Hilfe dieser Ungleichung ergibt sich leicht der

Satz 1. *Ist im Intervall $a < x < b$*

$$\sum f_\nu(x) \text{ konvergent für } x = x_1, \dots, x_k,$$

sowie (1) erfüllt, so ist daselbst

$$\sum f_\nu^{(x)}(x) \text{ gleichmäßig konvergent}$$

bei $0 \leq x < k$.

Zum Beweise beachten wir, daß in den Punkten $x_1, \dots, x_k$ für alle großen n

$$\left| \sum_{n+1}^{n+p} f_\nu(x) \right| < \delta$$

ist, also nach (2) in einem passenden Zwischenpunkte ξ

$$(3) \quad \left| \sum_{n+1}^{n+p} f_\nu^{(k-1)}(\xi) \right| < \delta |A|^{k-1}.$$

Da nun für $a < x < b$ bei passendem ξ'

$$\sum_{n+1}^{n+p} f_\nu^{(k-1)}(x) = \sum_{n+1}^{n+p} f^{(k-1)}(\xi) + (x - \xi) \sum_{n+1}^{n+p} f_\nu^{(k)}(\xi'),$$

worin die rechte Seite wegen (3) und (1) gleichmäßig klein ist für großes n , so ist $\sum f_\nu^{(k-1)}(x)$ gleichmäßig konvergent für $a < x < b$. Und die Behauptung ergibt sich durch vollständige Induktion.

Zusatz. Hängen im Satz 1 die Funktionen $f_\nu(x)$ noch von einer weiteren Veränderlichen y ab, bei $c < y < d$, und ist die Voraussetzung gleichmäßig für diese y erfüllt, so desgleichen die Behauptung.

Was sich ohne weiteres aus den vorstehenden Formeln ebenso ergibt.

Auf Grund des Satzes 1 kann jetzt, wie bereits bemerkt, der Satz 2 durch k -malige gliedweise Differentiation von $\sum f_\nu(x)$ erhalten werden. —

Wir wenden uns nunmehr zu Reihen von Funktionen $f_v(x, y)$ zweier Variablen und setzen voraus, daß dieselben in einem Rechteck $a < x < b$, $c < y < d$ Ableitungen

$$\frac{\partial^{k+l} f_v}{\partial x^k \partial y^l} = f_v^{(k,l)}(x, y) \quad ^3)$$

besitzen, die unabhängig sind von der Reihenfolge der Differentiationen.

Ist $l = 0$ oder $k = 0$, so kommt man, da bei der Differentiation die eine Variable konstant ist, ohne weiteres mit Satz 2 aus. Eine neuartige Fragestellung liegt daher nur im Falle $k \geq 1$, $l \geq 1$ vor, auf den wir uns deshalb im folgenden beschränken.

Die nach dem Vorbilde des Satzes 2 nächstliegende Frage ist jetzt die, was folgt, wenn nur von den beiden Reihen

$$(4) \quad \sum f_v(x, y) \quad \text{und} \quad \sum f_v^{(k,l)}(x, y)$$

die Konvergenz bzw. gleichmäßige Konvergenz vorausgesetzt wird.

Nun zeigt bei gegebenem k, l das mit Hilfe einer Weierstraßschen nichtdifferentiierbaren Funktion gebildete Beispiel

$$f_{2\mu-1}(x, y) = x^{k-1} \alpha'' \cos \beta'' y, \quad f_{2\mu}(x, y) = y^{l-1} \alpha'' \cos \beta'' x \\ (\mu = 1, 2, \dots),$$

bei welchem die beiden obigen Reihen in jedem Rechteck $a < x < b$, $c < y < d$ gleichmäßig konvergieren, daß trotzdem

1. jede der Reihen $\sum f_v^{(\kappa\lambda)}(x, y)$ mit $0 \leq \kappa \leq k$, $0 \leq \lambda \leq l$ im Rechteck fast überall divergieren kann, so daß von einer gliedweisen Differentiation der Reihe $\sum f_v(x, y)$ keine Rede sein kann;

2. bereits $\frac{\partial F}{\partial x}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$ nirgends vorhanden zu sein braucht, also erst recht nicht $F^{(k,l)}(x, y)$, so daß ein direktes Analogon zum Satz 2 bei Funktionen zweier Veränderlichen jedenfalls nicht besteht.

Immerhin gilt wenigstens der folgende, die Situation einigermaßen rettende

Satz 3. Ist im Rechteck $a < x < b$, $c < y < d$

$$(5) \quad \sum f_v(x, y) \text{ konvergent, } = F(x, y),$$

sowie

$$(6) \quad \sum f_v^{(k,l)}(x, y) \text{ gleichmäßig konvergent,}$$

so hat $F^{(k,l)}(x, y)$ überall dort, wo es bei irgendeiner vorgeschriebenen Reihenfolge der Differentiation existiert, unabhängig von derselben den Wert

$$(7) \quad F^{(k,l)}(x, y) = \sum f_v^{(k,l)}(x, y).$$

³⁾ Das Komma im Differentiationsindex kann wegleiben, wo Verwechslung ausgeschlossen ist.

Beweis. Ist etwa $F^{(kl)}(x_0, y_0)$ im vorstehenden Sinne vorhanden, so kann dieser Differentialquotient erhalten werden als entsprechend iterierter Limes des Quotienten aus einer leicht zu bildenden, aber nicht kurz wiederzugebenden Differenz von $F(x, y)$ durch das Produkt aller k Inkremente von x und aller l Inkremente von y . Wird dieser Quotient bei der Reihe (5) gebildet, so führt er auf eine Reihe von Funktionen der $k + l$ Inkremente, welche durch wiederholte Anwendung des Mittelwertsatzes als in einer Umgebung des Ursprungs (der Inkremente) gleichmäßig konvergent erkannt wird. Und wenn bei einer solchen Reihe jedes Glied den in Rede stehenden Limes besitzt, nämlich $= f_v^{(kl)}(x_0, y_0)$, so ist dieser selbe iterierte Limes bei ihrer Summe (vorhanden und) gleich der Summe der Limites, also $= \Sigma f_v^{(kl)}(x_0, y_0)$.

Der vorstehende Satz hat den schwerwiegenden Nachteil, daß darin die Existenz von $F^{(kl)}(x, y)$ nicht, wie im analogen Falle des Satzes 2, behauptet, sondern vorausgesetzt wird. Will man Sätze erhalten, die von diesem Nachteil frei sind, so genügt es, neben Voraussetzungen über die beiden Reihen (4) noch solche über

$$\Sigma f_v^{(k0)}(x, y) \quad \text{und} \quad \Sigma f_v^{(0l)}(x, y)$$

einzuführen. Man hat dann zunächst zum Satz 1 ein vollkommenes Analogon (Satz 4), aus dem zum Satz 2 das Analogon (Satz 5) leicht folgt

Satz 4. Ist im Rechteck $a < x < b$, $c < y < d$

$\Sigma f_v(x, y)$ konvergent in kl Punkten $x = x_1, \dots, x_k$, $y = y_1, \dots, y_l$,

$\Sigma f_v^{(k0)}(x, y)$ gleichmäßig konvergent für $y = y_1, \dots, y_l$,

$\Sigma f_v^{(0l)}(x, y)$ gleichmäßig konvergent für $x = x_1, \dots, x_k$,

sowie (6) erfüllt, so ist daselbst

$\Sigma f_v^{(\kappa\lambda)}(x, y)$ gleichmäßig konvergent

bei $0 \leq \kappa \leq k$, $0 \leq \lambda \leq l$.⁴⁾

Beweis. Auf Grund der beiden ersten Voraussetzungen ist nach

Satz 1

$\Sigma f_v^{(\kappa 0)}(x, y)$ gleichmäßig konvergent für $y = y_1, \dots, y_l$

bei $0 \leq \kappa \leq k$, und ebenso auf Grund der beiden letzten Voraussetzungen nach dem Zusatz zu Satz 1

$\Sigma f_v^{(0\lambda)}(x, y)$ gleichmäßig konvergent im Rechteck

⁴⁾ Für praktische Zwecke kann man (wie Satz 3 selbst zeigt, unbedenklich) die Voraussetzungen aufrunden. Für die Beweise wird dadurch allerdings nichts gewonnen.

bei $0 \leq \kappa \leq k$. Folglich ist, abermals nach dem Zusatz (bei vertauschtem x und y), die Behauptung erfüllt.

Satz 5. *Unter der Voraussetzung des Satzes 4 besitzt die Funktion*

$$F(x, y) = \sum f_\nu(x, y)$$

in jedem Punkte des Rechtecks eine Ableitung $F^{(k,l)}(x, y)$, die bei jeder Reihenfolge der Differentiation existiert und unabhängig von derselben den Wert hat

$$F^{(k,l)}(x, y) = \sum f_\nu^{(k,l)}(x, y).$$

Beweis. Bei jeder vorgeschriebenen Reihenfolge der Differentiationen ist jede derselben wegen der bewiesenen gleichmäßigen Konvergenz aller $\sum f_\nu^{(\kappa, \lambda)}(x, y)$ auf Grund des klassischen Satzes für Funktionen einer Variablen gliedweise ausführbar, und man erhält so die Behauptung.

Wir haben damit unser Ziel, einen für praktische Bedürfnisse geeigneten, mit einfachen Begriffen operierenden Satz über die mehrfache gliedweise Differentiation der Reihen von Funktionen zweier Veränderlichen anzugeben, erreicht. —

Und wir bemerken zum Schlusse nur noch, daß die sämtlichen hier angegebenen Sätze auf Funktionen von mehr als zwei Veränderlichen leicht auszudehnen sind, und daß sie auch für Integrale der Gestalt

$$\int_\alpha^\infty f_\nu(x) d\nu, \quad \int_\alpha^\infty f_\nu(x, y) d\nu, \quad \dots$$

mutatis mutandis⁵⁾ gelten. In den letztgenannten Fällen kann man sie entweder nach dem Vorbilde der obenstehenden Sätze direkt beweisen, oder aber sie aus jenen folgern.

⁵⁾ Es sind dabei im besonderen noch Voraussetzungen nötig, um die Differentiierbarkeit unter dem Integralzeichen bereits bei $\int_\alpha^\omega (\alpha < \omega < \infty)$ zu sichern.

Eine Bemerkung über die Konkavitäts- und Minimumsstellen der Funktionen.

Von

Ludwig Neder in Münster i. W.

Bei der Funktion $f(x)$ bzw. $f(x, y)$ bzw. $f(x, y, z)$ bzw. ... seien in einer gewissen Umgebung des Ursprungs O sämtliche Ableitungen zweiter Ordnung vorhanden und (bei zwei und mehr Argumenten) stetig.

Wir sagen, die Funktion $f(x, y, z, \dots)$ verläuft im Punkte $P = P(x, y, z, \dots)$ nach oben hohl (konkav), falls sie in allen übrigen Punkten einer Umgebung desselben oberhalb der in P tangierenden geraden, ebenen, räumlichen, ... Linearmanigfaltigkeit liegt.

Dann besitzt die Funktion f im Punkte P ein eigentliches¹⁾ Minimum dann und nur dann, wenn sie in P , bei daselbst verschwindenden Ableitungen erster Ordnung, nach oben hohl verläuft.

Aus der Theorie der Extrema bzw. einfachen Eigenschaften der quadratischen Formen folgt daher:

Satz 1. Damit die Funktion f im Punkte P nach oben hohl verläuft, ist

a) hinreichend, daß daselbst von den Ungleichungen

$$(1) \quad f_{xx} > 0 \text{ usw.}^2), \quad \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} > 0 \text{ usw.}^2), \quad \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix} > 0 \text{ usw.}^2) \dots$$

die bzw. 1, 2, 3, ... ersten Gruppen gelten,

b) notwendig dagegen nur, daß im Punkte P die betreffenden

(2) Ungleichungen (1) mit ≥ 0 (statt > 0)

bestehen.

¹⁾ $f(x, y, z, \dots)$ als alle übrigen Funktionswerte in einer Umgebung von P .

²⁾ D. h. noch die entsprechenden Ungleichungen für die übrigen vorhandenen

Hauptunterdeterminanten gleicher Ordnung.

Wir wollen nun im Falle der Beziehungen (1) die Funktion f als *im Punkte P stark hohl nach oben* bezeichnen.

Dann besteht, über Satz 1 hinaus, der folgende Satz 2, zu dem ich die Anregung und den Gedanken des Beweises aus den Betrachtungen geschöpft habe, die Herr S. Bernstein in einer kürzlich erschienenen Arbeit³⁾ zur Begründung seines dortigen Lemmas anstellt.

Satz 2. *Notwendig ist ferner, daß in einer jeden Umgebung des Punktes P ein Punkt liegt, wo die Funktion f stark hohl nach oben verläuft.*

Beweis. Wir führen denselben nur am Beispiel der Funktion von drei Argumenten vor⁴⁾:

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf P in den Ursprung O verlegt und daselbst

$$(3) \quad f_x = f_y = f_z = 0$$

(also P als Stelle eines Minimums) vorausgesetzt werden.

Ferner genügt es, von den Ungleichungen (1) nur die oben ausdrücklich angeschriebenen zu beweisen, da aus ihnen die übrigen²⁾ bekanntlich folgen.

Wir bezeichnen nun die dritte der obigen Determinanten mit F , ihre Unterdeterminanten in üblicher Weise mit $F_{xx}, F_{xy}, F_{xz}, \dots$, und, unter Weglassung der Argumente, durch Funktionszeichen ohne oberen Index Werte im allgemeinen Punkte $(x, y, z, \dots)$, durch solche mit oberem Index ^{0} Werte im Ursprung O .

1. Falls dann bereits

$$(4a) \quad F^0 > 0$$

ist, so zeigen die bekannten Relationen

$$\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xz} \\ F_{zx} & F_{zz} \end{vmatrix} = f_{yy} \cdot F, \quad \begin{vmatrix} F_{yy} & F_{yz} \\ F_{zy} & F_{zz} \end{vmatrix} = f_{xx} \cdot F$$

im Punkte O angewandt, wegen Satz 1b, daß

$$F_{xx}^0 F_{zz}^0 \geq (F_{xz}^0)^2, \quad F_{yy}^0 F_{zz}^0 \geq (F_{yz}^0)^2;$$

und hieraus folgt, daß die Annahme $F_{zz}^0 = 0$ der Voraussetzung (4a) widerspricht. Wegen Satz 1b ist daher

$$(4b) \quad F_{zz}^0 = \begin{vmatrix} f_{xx}^0 & f_{xy}^0 \\ f_{yx}^0 & f_{yy}^0 \end{vmatrix} > 0,$$

³⁾ Über ein geometrisches Theorem und seine Anwendung [Math. Zeitschrift 26 (1927), S. 551–558], vgl. § 2.

⁴⁾ Für ein Argument ist der Satz trivial, für zwei und mehr als drei Argumente legt man sich den Beweis an Hand des obigen Beispiels leicht zurecht.

und hieraus folgt, abermals wegen Satz 1 b,

$$(4c) \quad f_{xx}^0 > 0.$$

Womit durch (4a, b, c) wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der Ableitungen die Behauptung im vorliegenden Falle bewiesen ist.

2. Falls nunmehr

$$(5) \quad F^0 \leq 0,$$

so sei $\mathfrak{R}$ eine Kugel um O , vom Radius r , der Art, daß

$$(6) \quad f > f^0 \text{ auf } \mathfrak{R}.$$

Nach Bernsteinschem Vorbilde führen wir die Hilfsfunktion

$$\varphi = f^0 + \frac{1}{2} \varepsilon (x^2 + y^2 + z^2)$$

ein, wo $\varepsilon > 0$ so klein gewählt ist, daß

$$(7) \quad \varepsilon r^2 \leq \text{dem nach (6) positiven Min. } [f - f^0] \text{ auf } \mathfrak{R} \text{ ausfällt.}$$

Nun gelten wegen der Voraussetzung der Konkavität die Ungleichungen (2), welche in Verbindung mit (3) und (5) ergeben, daß

$$f_x^0 = 0 \text{ usw.}, \quad f_{xx}^0 \geq 0 \text{ usw.}^2), \quad F_{xx}^0 \geq 0 \text{ usw.}^2), \quad F^0 = 0,$$

so daß in der für kleine $x^2 + y^2 + z^2$ geltenden Aussage

$$f = f^0 + \frac{1}{2} \left\{ x^2 f_{xx}^0 + \dots + 2xy f_{xy} + \dots \right\} + o(x^2 + y^2 + z^2)$$

die quadratische Form $\{\dots\}$ in eine Summe $\sum$ von höchstens zwei Quadraten transformiert werden kann, wodurch sich ergibt

$$\delta = f - \varphi = \sum (a_r x + b_r y + c_r z)^2 - \frac{1}{2} [\varepsilon + o(1)] \cdot (x^2 + y^2 + z^2).$$

Hiernach ist $\delta < 0$ in Nachbarpunkten von O , während $\delta > 0$ ist auf $\mathfrak{R}$ wegen (7). Folglich hat $\delta = \delta(x, y, z)$ ein (negatives) Minimum in einem inneren Punkte von $\mathfrak{R}$.

Dasselbst gelten folglich die Ungleichungen (2) für δ statt f , so daß wegen $f = \varphi + \delta$ schließlich, in naheliegender Bezeichnung,

$$f_{xx} = \varepsilon + \delta_{xx} \geq \varepsilon > 0,$$

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \varepsilon^2 + \varepsilon (\delta_{xx} + \delta_{yy}) + \Delta_{zz} \geq \varepsilon^2 > 0,$$

$$F = \varepsilon^3 + \varepsilon^2 \sum \delta_{x,r} + \varepsilon \sum \Delta_{xx} + \Delta \geq \varepsilon^3 > 0,$$

womit auch im Falle 2 die Behauptung bewiesen ist.

(Eingegangen am 1. Juli 1926.)

Die Sauersche Zellteilung des Raumes.

Von

Heinrich Liebmann in Heidelberg.

Herr R. Sauer hat in gedrängter Form seine Untersuchung: „Die Raumeinteilungen, welche durch Ebenen erzeugt werden, von denen je vier durch einen Punkt gehen“ mitgeteilt¹⁾.

Zweck der folgenden Darlegung ist, die Frage im Sinne der Differentialgeometrie aufzunehmen²⁾. Im Mittelpunkt steht eine Eigenschaft der Torsen (Develeppabeln) vierter Ordnung erster Spezies, die ohne besonderes Rüstzeug aus dem Arsenal der synthetischen Geometrie leicht zu erfassen ist. (Übrigens werden wir an Stelle dieser Fläche das duale Gebilde, die C_1^4 , also die vollständige Schnittkurve zweier Flächen zweiten Grades betrachten.)

Die Zellteilung fordert, vier Flächenscharen (später Ebenenscharen)

$$u(x, y, z) = c_1, \quad v(x, y, z) = c_2, \quad w(x, y, z) = c_3, \quad t(x, y, z) = c_4$$

in allgemeinsten Weise so zu bestimmen, daß jede Fläche einer Schar durch die Spuren der drei anderen Scharen von einem Dreiecksnetz überspannt wird. Durch die Forderung, daß die Abstufung

$$\Delta u, \Delta v, \Delta w, \Delta t,$$

welche die Zellteilung liefern soll, sich unbeschränkt verkleinern läßt, entsteht ein differentialgeometrisches Problem.

In § 1 wird die allgemeine Lösung des Zellproblems abgeleitet (Gleichung P) und sodann die Linienelementbedingung (L) des speziellen dualen Problems hieraus gewonnen.

¹⁾ Sitzungsber. der bayr. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Abt. 1925, S. 41–56.

²⁾ In demselben Sinne habe ich die geradlinigen Dreiecksnetze der Ebene behandelt und die synthetische Lösung von H. Graf und R. Sauer, „Über dreifache Geradensysteme in der Ebene, welche Dreiecksnetze bilden“, ebenda 1924, S. 119 bis 156 differentialgeometrisch gewonnen. (H. Liebmann, Bestimmung der geradlinigen Dreiecksnetze aus den Krümmungselementen der Hüllkurven, ebenda 1927, S. 73–87).

In § 2 wird die charakteristische Eigenschaft der C_1^4 , nämlich die Bindung von vier Linienelementen, deren Träger einer Ebene angehören, besprochen und daraus erkannt (ohne funktionentheoretische Hilfsmittel), daß diese Kurven und nur sie die Forderung des dualen Problems erfüllen.

§ 1.

Die Parametergleichung.

1. Ableitung der Parametergleichung. Als krummlinige Koordinaten verwenden wir drei von den vier Flächenparametern und suchen die Bindung der vierten zu bestimmen.

Durch den Punkt

$$Q(u, v, w)$$

gehen vier Flächen, je eine aus jeder der vier Scharen (u, v, w, t) .

Auf den Schnittkurven der Flächen u, v, w wählen wir die Punkte

$$Q_1(u + \varepsilon, v, w), \quad Q_2(u, v + \eta, w), \quad Q_3(u, v, w + \zeta),$$

die wir noch der Bedingung unterwerfen, daß sie derselben t -Fläche angehören sollen; also wird gefordert

$$t(u + \varepsilon, v, w) = t(u, v + \eta, w) = t(u, v, w + \zeta).$$

An das Dreieck Q_1, Q_2, Q_3 schließen sich drei Dreiecke $Q_1 Q_2 R_3, Q_2 Q_3 R_1, Q_3 Q_1 R_2$ mit den drei neuen Ecken

$$R_3(u + \varepsilon, v + \eta, w), \quad R_1(u, v + \eta, w + \zeta), \quad R_2(u + \varepsilon, v, w + \zeta),$$

die wieder auf einer t -Fläche liegen, so daß noch die Bedingung hinzukommt:

$$t(u + \varepsilon, v + \eta, w) = t(u, v + \eta, w + \zeta) = t(u + \varepsilon, v, w + \zeta).$$

Durch Reihenentwicklung erhält man die folgenden Gleichungen, in denen die Fußmarken die Differentiation nach u, v und w andeuten:

$$\varepsilon t_1 + \frac{\varepsilon^2}{2} t_{11} + \dots = \eta t_2 + \frac{\eta^2}{2} t_{22} + \dots = \zeta t_3 + \frac{\zeta^2}{2} t_{33} + \dots$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon t_1 + \eta t_2 + \frac{1}{2} (\varepsilon^2 t_{11} + 2 \varepsilon \eta t_{12} + \eta^2 t_{22}) + \dots \\ &= \eta t_2 + \zeta t_3 + \frac{1}{2} (\eta^2 t_{22} + 2 \eta \zeta t_{23} + \zeta^2 t_{33}) + \dots \\ &= \zeta t_3 + \varepsilon t_1 + \frac{1}{2} (\zeta^2 t_{33} + 2 \zeta \varepsilon t_{31} + \varepsilon^2 t_{11}) + \dots \end{aligned}$$

und hieraus leicht

$$\varepsilon \eta t_{12} = \eta \zeta t_{23} = \zeta \varepsilon t_{31}$$

und schließlich

$$(T) \quad t_{12} : t_{23} : t_{31} = t_1 t_2 : t_2 t_3 : t_3 t_1,$$

oder kurz

$$t_{ik} = p t_i t_k \quad (i \neq k; i, k = 1, 2, 3).$$

Diese Gleichungen sind leicht zu integrieren, wie folgt.

Dreifache Berechnung von $t_{123} = \frac{\partial^3 t}{\partial u \partial v \partial w}$ führt auf

$$p_1 t_2 t_3 = p_2 t_3 t_1 = p_3 t_1 t_2$$

oder

$$p_1 : t_1 = p_2 : t_2 = p_3 : t_3 = \lambda,$$

und aus

$$p_{ik} = p_{ki}$$

folgt dann leicht, daß p Funktion von t ist,

$$p = p(t(u, v, w)).$$

Somit tritt an Stelle von (T)

$$t_{ik} = p(t) t_i t_k.$$

Hierin kann t durch eine geeignete Funktion

$$\bar{t} = \psi(t)$$

ersetzt werden, so zwar, daß

$$\bar{t}_{ik} = (\psi')^2 t_{ik} + \psi'' t_i t_k = t_i t_k ((\psi')^2 p + \psi'') = 0$$

wird und daher

$$(P) \quad \bar{t}(t) + \bar{u}(u) + \bar{v}(v) + \bar{w}(w) = 0.$$

Daß diese „Parameterbedingung“ nicht nur notwendig ist, sondern hinreicht, erkennt man leicht durch Abbildung des $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{t})$ -Raumes auf den euklidischen, wobei die vier Koordinaten gleich den mit leicht bestimmbar Konstanten multiplizierten Normalformen der Gleichungen der Seitenflächen eines regulären Tetraeders gesetzt werden. Es entsteht das reguläre „Tetraeder-Oktaedergefüge“. (In unserem Ansatz ist $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4$ ein Tetraeder, an dessen Grundfläche $Q_1 Q_2 Q_3$ sich das Oktaeder $Q_1 Q_2 Q_3 R_1 R_2 R_3$ schließt, mit den acht Seitenflächen

$$Q_1 Q_2 Q_3, R_1 R_2 R_3, Q_i Q_k R_l, R_i R_k Q_l.)$$

Um die Anschauung zu unterstützen, sei noch erwähnt, daß um einen Gitterpunkt sich acht Tetraeder und sechs Oktaeder anordnen. Im regulären Fall schneiden die von einem Punkt ausgehenden Kanten die Kugel in den Ecken des halbbregulären 14-Flächners, der durch „Abecken“ des Würfels bis zu den Kantenmitten entsteht.

2. Das duale Problem. Die Aufgabe, alle geforderten Zellteilungen mit ebenen Flächen zu bestimmen, lautet also jetzt so: Es sind in allgemeinsten Weise vier Ebenenscharen so zu bestimmen, daß die Schnittbedingung (vier Ebenen durch einen Punkt) mit der Parametergleichung (P) zusammenfällt.

Wir behandeln die dualistisch entsprechende, welche lautet:

Es sind die Funktionen

$$x_1(u), y_1(u), z_1(u); \quad x_2(v), y_2(v), z_2(v); \quad x_3(w), y_3(w), z_3(w); \\ x_4(t), y_4(t), z_4(t)$$

so zu bestimmen, daß vier Punkte u, v, w, t dann in einer Ebene liegen, wenn die Beziehung

$$(P) \quad \bar{u}(u) + \bar{v}(v) + \bar{w}(w) + \bar{t}(t) = 0$$

besteht³⁾.

Bezeichnet man die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

mit D (ihre Differentialquotienten nach u, v, w, t durch die Fußmarken 1–4), so ist die Bedingungsgleichung

$$\bar{u}(u) + \bar{v}(v) + \bar{w}(w) + \bar{t}(t) + \lambda D \equiv 0$$

und man erhält, wie man durch Differentiation und Elimination von λ und seinen vier Differentialquotienten

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$$

erkennt, die „Linielementforderung“⁴⁾

$$\begin{cases} D = 0, \\ D_1 D_2 D_{34} + D_3 D_4 D_{12} = D_1 D_3 D_{24} + D_2 D_4 D_{13} = D_1 D_4 D_{23} + D_2 D_3 D_{14}. \end{cases}$$

(L) gibt eine Bindung zwischen den Linielementen

$$x'_i : y'_i : z_i,$$

deren Träger jeweils vier komplanare Punkte sind, und ist eine Forderung, die sich rein projektiv deuten läßt. Ihre Diskussion wird uns (§ 2, Nr. 2) darüber aufklären, daß die P -Kurven mit den C_1^4 identisch sind.

Nimmt man folgende spezielle Lage

$$x_1 = y_1 = -x_2 = y_2 = -x_3 = -y_3 = x_4 = -y_4 = 1, \\ z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = 0,$$

³⁾ Im folgenden sprechen wir kurzweg von „ P -Kurven“, obwohl es sich eigentlich um vier Kurvenbogen mit den Parametern u, v, w, t handelt.

⁴⁾ Durch kurze Rechnung (Differentiation und Elimination) folgt aus (L) umgekehrt (T), daher auch (P).

und setzt außerdem

$$z'_1 = z'_2 = z'_3 = z'_4 = 1,$$

so folgt

$$D_1 = -D_2 = D_3 = -D_4 = 4,$$

$$D_{12} = 2(y'_2 - y'_1), \quad D_{13} = 2(x'_1 - x'_3 + y'_1 - y'_3), \quad D_{14} = 2(x'_4 - x'_1),$$

$$D_{23} = 2(x'_3 - x'_2), \quad D_{24} = 2(x'_2 - x'_4 - y'_2 + y'_4), \quad D_{34} = 2(y'_3 - y'_4);$$

also wird aus L

$$(L_1) \quad x'_1 + x'_2 = x'_3 + x'_4, \quad y'_1 + y'_4 = y'_2 + y'_3.$$

(L_1) läßt sich in allgemeiner Weise durch den Ansatz

$$(L_2) \quad \begin{array}{ll} x'_1 + a_1 + b_1 + c_1 = 0, & y'_1 + a_2 + b_2 + c_2 = 0, \\ -x'_2 - a_1 + b_1 + c_1 = 0, & y'_2 - a_2 + b_2 + c_2 = 0, \\ -x'_3 - a_1 - b_1 + c_1 = 0, & -y'_3 - a_2 - b_2 + c_2 = 0, \\ x'_4 + a_1 - b_1 + c_1 = 0, & -y'_4 + a_2 - b_2 + c_2 = 0 \end{array} \quad \text{mit}$$

erfüllen, bei freier Wahl der sechs Größen $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$.

Diese Darstellung erweist sich später als vorteilhaft.

§ 2.

Die Parametereigenschaft der C_1^4 .

1. Vier Linienelemente mit komplanaren Trägern. Es ist bekannt, daß bei geeigneter Parameterdarstellung (durch elliptische Funktionen) die Parameter der Schnittpunkte einer C_1^4 mit Ebenen die Gleichung

$$\bar{u} + \bar{v} + \bar{w} + \bar{t} = 0$$

erfüllen. Das soll hier ganz elementar bewiesen werden, vielmehr der Doppelsatz:

Eine Raumkurve läßt dann und nur dann eine Parameterdarstellung zu, bei der die Parameter von je vier komplanaren Punkten⁵⁾ an die Gleichung

$$\bar{u} + \bar{v} + \bar{w} + \bar{t} = 0$$

gebunden sind, wenn sie eine C_1^4 ist.

Da die zu befolgende Methode gerade darauf abhebt, die wirkliche Darstellung auszuschalten, d. h. ohne Einführung von Normalparametern allein mit den definierenden Differentialgleichungen zu arbeiten, so ist ein Beispiel einfacher aber nicht geradezu trivialer Art wohl angebracht.

⁵⁾ Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, daß mit dieser Fassung die Ordnung der Kurve nicht vorweggenommen wird. Verlangt wird ja nur, daß unter den Schnittpunkten sich ein Punktquadrupel mit dieser Bindung befindet.

Die Raumkurve (C^3)

$$x = u, \quad y = u^2, \quad z = u^3$$

bildet zusammen mit der Geraden (g)

$$x = y = z = t$$

eine C_1^4 . Drei Punkte (u, v, w) der C^3 und ein Punkt (t) von g liegen dann und nur dann in einer Ebene, wenn

$$D \equiv \begin{vmatrix} 1 & t & t & t \\ 1 & u & u^2 & u^3 \\ 1 & v & v^2 & v^3 \\ 1 & w & w^2 & w^3 \end{vmatrix}$$

gleich Null ist.

Die Entwicklung der Determinante (am einfachsten so zu erhalten, daß man statt der ersten Zeile schreibt $1 t t^2 t^3$, dann D als Differenzenprodukt entwickelt und zuletzt die Potenzen von t wieder durch die erste ersetzt) gibt die Gleichung

$$(v-u)(w-v)(u-w)(uvw - t(uv + vw + wu) + t(u + v + w) - t) = 0$$

oder

$$\frac{t}{1-t} = \frac{u}{1-u} \cdot \frac{v}{1-v} \cdot \frac{w}{1-w},$$

und schließlich

$$\lg \frac{1-t}{t} + \lg \frac{u}{1-u} + \lg \frac{v}{1-v} + \lg \frac{w}{1-w} \equiv \bar{t}(t) + \bar{u}(u) + \bar{v}(v) + \bar{w}(w) = 0,$$

womit die „Eichung“, d. h. Bestimmung der $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{t}$ erreicht ist.

Die Behandlung der Frage nach der Beziehung zwischen vier Linien-elementen mit komplanaren Trägern einer C_1^4 verliert nicht an Allgemeinheit, wenn wir, wie schon oben in § 1, Nr. 2 für die vier Träger die spezielle Lage

$$x_1 = y_1 = -x_2 = y_2 = -x_3 = -y_3 = x_4 = -y_4 = 1, \\ z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = 0$$

wählen, hinterher aber das Ergebnis projektiv deuten.

Alle durch diese vier Punkte gehenden Flächen zweiten Grades sind durch

$$\lambda(x^2 - 1) + \mu(y^2 - 1) + rz^2 + 2z(ax + by + c) = 0$$

gegeben, wobei fünf wesentliche Konstanten auftreten.

Für die vier Linienelemente

$$x_\nu, y_\nu, z_\nu; \quad x'_\nu = \frac{dx_\nu}{dz_\nu}, \quad y'_\nu = \frac{dy_\nu}{dz_\nu}$$

erhält man

$$\begin{aligned} \lambda x'_1 + \mu y'_1 + a + b + c &= 0, & -\lambda x'_2 + \mu y'_2 - a + b + c &= 0, \\ -\lambda x'_3 - \mu y'_3 - a - b + c &= 0, & \lambda x'_4 - \mu y'_4 + a - b + c &= 0, \end{aligned}$$

und hieraus

$$\lambda(x'_1 + x'_2 - x'_3 - x'_4) + \mu(y'_1 - y'_2 - y'_3 + y'_4) = 0.$$

Hieraus folgen die Bedingungen

$$(L_1) \quad x'_1 + x'_2 - x'_3 - x'_4 = 0, \quad y'_1 - y'_2 - y'_3 + y'_4 = 0,$$

also dieselben wie oben.

Bevor wir sie deuten, stellen wir noch fest:

Durch vier Linienelemente mit diesen Trägern und der Bindung (L_1) lassen sich ∞^2 Flächen zweiten Grades

$$\lambda(x^2 + 2z(a_1x + b_1y + c_1) - 1) + \mu(y^2 + 2z(a_2x + b_2y + c_2) - 1) + \nu z^2 = 0$$

hindurchlegen (also auch $\infty^2 C_1^4$). Dabei ist die Darstellung der $x'_1 \dots y'_4$ durch die $a_1 \dots c_2$ genau durch die oben schon aufgestellten Gleichungen (L_2) gegeben.

M. a. W.: Aus drei linear unabhängigen Flächen zweiten Grades durch die vier Punkte erhält man die vier Linienelemente der C_1^4 , und aus den Linienelementen, die L_1 erfüllen, daher durch Gleichungen L_2 darstellbar sind, die Flächen.

2. Geometrische Deutung und Nachweis der P -Eigenschaft der C_1^4 . Um jetzt die projektive Bedeutung der Gleichungen (L_1) zu erkennen, legen wir durch die vier Linienelemente die Geraden

$$(g_\nu) \quad \bar{x}_\nu = x_\nu + \bar{z} x'_\nu, \quad \bar{y}_\nu = y_\nu + \bar{z} y'_\nu. \quad (\nu = 1, 2, 3, 4)$$

und schneiden mit einer zur xy -Ebene parallelen Ebene, also einer Ebene, die die (unendlich fernen) Schnittpunkte $(P_1 P_2) \times (P_3 P_4)$, $(P_1 P_4) \times (P_2 P_3)$ zweier Paare von Gegenseiten enthält. Es ist dann

$$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = \bar{x}_3 + \bar{x}_4, \quad \bar{y}_1 + \bar{y}_4 = \bar{y}_2 + \bar{y}_3,$$

und die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Strecken $S_1 S_2$ und $S_3 S_4$ ist der y -Achse, die der Strecken $S_1 S_4$ und $S_2 S_3$ der x -Achse parallel.

Aus dieser an sich trivialen Bemerkung folgt dann der Satz: Vier Linienelemente, deren Träger $P_1 P_2 P_3 P_4$ einer Ebene angehören (und ein eigentliches Viereck bilden), gehören dann und nur dann einer (und damit ∞^2) C_1^4 an, wenn eine (und dann jede) durch die Achse (h), welche die Schnittpunkte $(P_1 P_2) \times (P_3 P_4)$, $(P_1 P_4) \times (P_2 P_3)$ verbindet, gelegte Ebene die von den vier Linienelementen ausgehenden Geraden (in S_1, S_2, S_3, S_4) so trifft, daß die durch $(S_1 S_2)$, $(S_2 S_3)$, $(S_3 S_4)$, $(S_4 S_1)$ von den

Spuren dieser letzteren Geraden auf der Achse h harmonisch getrennten Punkte S_{12}, S_{34}, S_{23} und S_{41} sich so anordnen: S_{12}, S_{34} und $(P_1 P_2) \times (P_3 P_4)$, ebenso S_{23}, S_{41} und $(P_1 P_4) \times (P_2 P_3)$ liegen auf je einer Geraden.

Dieser Satz, in dem selbstverständlich statt des benützten Paares von Nebenecken irgendein anderes verwendet werden könnte, führt auch zu einer sehr einfachen linearen Konstruktion des vierten Linienelementes, wenn drei von ihnen und der (in der Ebene $P_1 P_2 P_3$ gelegene) Träger des vierten gegeben sind. Sie kann leicht ausgeführt werden und ist viel einfacher als die Konstruktion des achten „assozierten“ Punktes zu sieben gegebenen.

Mit L_1 ist also jetzt auch L projektiv gedeutet, und hieraus folgt wegen der vollständigen Äquivalenz

$$(L) \rightleftharpoons (P)$$

der erste Teil des in Nr. 1 ausgesprochenen Satzes. Es ist jetzt bewiesen:

Jede C_1^4 läßt eine Parameterstellung zu, bei der die zu vier Punkten der Kurve gehörigen Parameter durch

$$\bar{u} + \bar{v} + \bar{w} + \bar{t} = 0$$

gebunden sind, wenn die Punkte einer Ebene angehören.

Um weiter zu gehen und zu zeigen, daß diese Eigenschaft für die C_1^4 charakteristisch ist, ziehen wir die Krümmungselemente (K.E.) heran.

3. K.E.-Bindung der C_1^4 . Wir werden später sehen, daß je vier K.E. einer „ P -Kurve“, deren Träger in einer Ebene liegen, einer C_1^4 angehören.

Unter der Voraussetzung, daß diese Bedingung erfüllt ist, wählen wir zwei feste Punkte P_1, P_2 auf der Kurve und legen durch die Achse $P_1 P_2$ das Ebenenbüschel. Jede Ebene des Büschels schneidet die Kurve in zwei weiteren zugeordneten Punkten $S_3(t), S_4(t)$, wobei t ein die einzelne Ebene des Büschels charakterisierender Parameter ist.

Durch die beiden festen K.E. gehen ∞^3 Flächen zweiten Grades

$$\lambda_1 F_1(x, y, z) + \lambda_2 F_2(x, y, z) + \lambda_3 F_3(x, y, z) + \lambda_4 F_4(x, y, z) = 0.$$

Hierin können $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4$ nachträglich so als Funktionen von t bestimmt werden, daß die C_1^4 -Bindung der vier K.E. zum Ausdruck kommt, d. h.

Die Kurve läßt sich darstellen durch die Gleichungen

$$E(x, y, z, t) \equiv E_1(x, y, z) + t E_2(x, y, z) = 0,$$

$$\Phi(x, y, z, t) \equiv \lambda_1(t) F_1(x, y, z) + \lambda_2(t) F_2(x, y, z) + \lambda_3(t) F_3(x, y, z) = 0,$$

$$\Psi(x, y, z, t) \equiv \mu_2(t) F_2(x, y, z) + \mu_3(t) F_3(x, y, z) + \mu_4(t) F_4(x, y, z) = 0,$$

wobei auch die zu $S_3(t), S_4(t)$ gehörigen K.E. den beiden Flächen $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ angehören.

Daher gilt neben

$$\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 = 0$$

auch

$$\lambda'_1 F_1 + \lambda'_2 F_2 + \lambda'_3 F_3 = 0, \quad \lambda''_1 F_1 + \lambda''_2 F_2 + \lambda''_3 F_3 = 0,$$

also entweder für jeden Punkt

$$F_1(x, y, z) = F_2(x, y, z) = F_3(x, y, z) = 0,$$

die Kurve also eine C_1^4 , oder die Determinante

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda'_1 & \lambda'_2 & \lambda'_3 \\ \lambda''_1 & \lambda''_2 & \lambda''_3 \end{vmatrix}$$

wird zu Null, so daß zwischen den λ eine lineare Abhängigkeit mit konstanten Koeffizienten besteht. Dann ist aber

$$\Phi(x, y, z) = 0$$

ein lineares Büschel von Flächen zweiten Grades, und die Kurve wieder eine C_1^4 .

4. Folgerung. Wir haben jetzt nur noch zu zeigen, daß die Voraussetzungen des Hilfssatzes hier erfüllt sind.

Bezeichnen wir die in (L) auftretenden Ausdrücke kurz mit $\delta^{(12)}, \delta^{(13)}, \delta^{(14)}$, so ist zu beachten, daß aus (L) durch Differentiation noch entsteht:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \delta^{(12)}}{\partial u} du + \frac{\partial \delta^{(12)}}{\partial v} dv + \frac{\partial \delta^{(12)}}{\partial w} dw + \frac{\partial \delta^{(12)}}{\partial t} dt \\ &= \frac{\partial \delta^{(13)}}{\partial u} du + \frac{\partial \delta^{(13)}}{\partial v} dv + \frac{\partial \delta^{(13)}}{\partial w} dw + \frac{\partial \delta^{(13)}}{\partial t} dt \\ &= \frac{\partial \delta^{(14)}}{\partial u} du + \frac{\partial \delta^{(14)}}{\partial v} dv + \frac{\partial \delta^{(14)}}{\partial w} dw + \frac{\partial \delta^{(14)}}{\partial t} dt \end{aligned}$$

und

$$\frac{\partial D}{\partial u} du + \frac{\partial D}{\partial v} dv + \frac{\partial D}{\partial w} dw + \frac{\partial D}{\partial t} dt = 0.$$

Dies führt bei — wegen der projektiven Natur des Problems erlaubt — mehrfach schon bevorzugter spezieller Wahl der vier Punkte und der dadurch bedingten Darstellung (L_2) der Linienelementkoordinaten auf

$$\begin{aligned} x'_1 + x'_2 &= -x'_3 - x'_4 = y'_1 + y'_2 = -y'_2 - y'_3 = 4b_1 a_2, \\ x''_1 + x''_3 &= 4b_1(c_2 - c_1), \quad y'_1 + y'_3 = 4a_2(c_1 - c_2). \end{aligned}$$

Genau dieselben Beziehungen erhält man aber aus

$$x^2 - 1 + 2z(a_1 x + b_1 y + c_1) + d_1 z^2 = 0$$

in Verbindung mit

$$y^2 - 1 + 2z(a_2 x + b_2 y + c_2) + d_2 z^2 = 0.$$

Also sind — nach freier Wahl der vier Linienelemente innerhalb der durch (L) gewiesenen Schranken — die vier K.E. in beiden Fällen in gleicher Weise festgelegt, d. h. die vier K.E. der P -Kurve gehören einer C_1^4 an.

Mit Rücksicht auf Nr. 3 ist also jetzt auch bewiesen:

Jede P -Kurve ist eine C_1^4 , die P -Eigenschaft ist für die C_1^4 charakteristisch, w. z. b. w.

Die hier benützte Rechnung läßt sich übrigens durch eine Überlegung ersetzen: Verlangt man, daß (nach Bindung der Linienelementquadrupel durch L !) die vier K.E. jedesmal einer C_1^4 angehören, so bedeutet dies eine lineare Bestimmung von drei K.E. bei freier Wahl z. B. von x_1'', y_1'' . Auf eine gleichartige lineare Bestimmung führt die P -Forderung. In beiden Fällen hängen die Koeffizienten von den Bestimmungsgrößen der vier Linienelemente ab. Da die C_1^4 sicher zu den P -Kurven gehören (§ 2, Nr. 2), umschließt die zweite Forderung die erste. Andererseits ist aber die zweite nicht allgemeiner als die erste, weil beidesmal willkürlich gewählte x_1'', y_1'' die sechs übrigen zweiten Differentialquotienten (linear) bestimmen. Also müssen beide Bestimmungen identisch sein.

Erwünscht wäre noch eine Deutung der Beziehungen zwischen den vier K.E., die nur metrische Elemente, Krümmungsradien, Winkel, Entfernungen enthält und sich der für die ebenen Kurven dritter Ordnung charakteristischer Gleichung

$$\frac{1}{\varrho_1 \sin^3 \tau_1} + \frac{1}{\varrho_2 \sin^3 \tau_2} + \frac{1}{\varrho_3 \sin^3 \tau_3} = 0$$

an die Seite stellt, in der $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ die Krümmungsradien in den Schnittpunkten mit einer Geraden, τ_1, τ_2, τ_3 die Winkel der Kurve mit der Geraden bedeuten.

(Eingegangen am 30. April 1927.)

Ein Beitrag zum Cauchyschen Problem*).

Von

Erich Rothe in Breslau.

Für die lineare partielle Differentialgleichung

$$(1) \quad \frac{\partial^{\mu} z}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial^{\lambda} z}{\partial y^{\lambda}}$$

besteht das sogenannte Cauchysche Problem bekanntlich in der Aufgabe, eine Lösung von (1) zu finden, welche den Anfangsbedingungen

$$(2) \quad z(0, y) = b_0(y), \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{x=0} = b_1(y), \quad \dots, \quad \left(\frac{\partial^{\mu-1} z}{\partial x^{\mu-1}} \right)_{x=0} = b_{\mu-1}(y)$$

mit vorgeschriebenen $b_{\nu}(y)$ genügt. Bei analytischen b_{ν} besitzt dies Problem im Falle $\lambda \leq \mu$ nach den klassischen Existenzsätzen eine und nur eine in der Umgebung des Nullpunktes analytische Lösung. Im folgenden werden einige Aussagen über das Verhalten dieser Lösung gemacht (Satz 6). Die Hauptaufgabe der vorliegenden Arbeit besteht jedoch in der Behandlung des von den klassischen Existenzsätzen nicht erfaßten Falles $\lambda > \mu$. Wir werden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz analytischer Lösungen des Cauchyschen Problems angeben und die hinreichenden auf die allgemeinere Gleichung

$$(3) \quad \frac{\partial^m z}{\partial x^m} = \sum_{p=0}^{m'} \sum_{q=0}^{\lambda} a_{pq}(x) \frac{\partial^{p+q} z}{\partial x^p \partial y^q} + b(x, y) \quad (m > m'),$$

in welcher die a_{pq} stetige Funktionen von x allein sind, in geeigneter Weise übertragen (Seite 66). Schon bei einfacher Abhängigkeit der Koeffizienten a_{pq} von y ist diese Übertragung unrichtig, wie an einem Beispiel gezeigt wird (Seite 72).

*) Diese Arbeit wurde von der Fakultät für allgemeine Wissenschaften der Technischen Hochschule zu Breslau als Habilitationsschrift angenommen.

Ehe wir das den Fall $\lambda > \mu$ betreffende Ergebnis formulieren, erinnern wir kurz an einige Begriffe aus der Theorie der ganzen Funktionen endlicher Ordnung. Eine solche Funktion $b(y)$ einer komplexen Variablen y heißt bekanntlich von der Ordnung ϱ , wenn ϱ die kleinste Zahl von der folgenden Eigenschaft ist: Zu jedem positiven ε existiert eine positive Zahl $R(\varepsilon)$, so daß

$$|b(y)| < e^{|y|^{e+\varepsilon}} \quad \text{für} \quad |y| > R(\varepsilon).$$

Ist b von der Ordnung ϱ und existiert keine Konstante A , so daß bei geeigneter Wahl eines positiven R für alle $|y| > R$

$$|b(y)| < e^{A|y|^\varrho}$$

ist, so sagt man, b sei vom Maximaltypus. Existiert jedoch eine solche Zahl, so betrachte man die kleinste nicht negative Zahl von der Eigenschaft: Zu jedem positiven ε existiert eine positive Zahl $R(\varepsilon)$, so daß für $|y| > R(\varepsilon)$

$$|b(y)| < e^{(\alpha+\varepsilon)|y|^\varrho}$$

ist. Ist $\alpha \neq 0$, so sagt man, b sei vom Normaltypus, genauer vom Normaltypus α . Ist $\alpha = 0$, gilt also

$$|b(y)| < e^{\varepsilon|y|^\varrho} \quad \text{für} \quad |y| > R(\varepsilon),$$

so sagt man, b sei vom Minimaltypus.

Um unsere Ergebnisse leichter aussprechen zu können, werden wir uns ferner der folgenden Ausdrucksweise bedienen: Wir sagen, die Anfangsbedingungen (2) seien von endlicher Ordnung, wenn die Funktionen b_ν ($\nu = 0, 1, \dots, \mu - 1$) ganze Funktionen endlicher Ordnung sind; von der Ordnung ϱ , wenn alle b_ν höchstens von der Ordnung ϱ , mindestens ein b_ν aber genau von der Ordnung ϱ ist; entsprechend ist die Ausdrucksweise zu verstehen, die Anfangsbedingungen seien vom Maximal-, Normal- oder Minimaltypus der Ordnung ϱ .

Unser Ergebnis bezüglich der Gleichung (1) im Falle $\lambda > \mu$ läßt sich nun folgendermaßen aussprechen: Soll das Problem (1), (2) eine Lösung $z(x, y)$ besitzen, welche in der Umgebung des Nullpunktes eine analytische Funktion der beiden Variablen x, y ist, so müssen die Anfangsbedingungen (2) jedenfalls von endlicher Ordnung sein. Ist diese notwendige Bedingung erfüllt und ϱ die Ordnung der Anfangsbedingungen, so sind folgende Fälle zu unterscheiden:

$$\text{I. } \varrho > \frac{\lambda}{\lambda - \mu}, \quad \text{II. } \varrho < \frac{\lambda}{\lambda - \mu}, \quad \text{III. } \varrho = \frac{\lambda}{\lambda - \mu}.$$

Im Falle I existiert *keine* in der Umgebung des Nullpunktes analytische Lösung des Problems (1), (2). Im Falle II existiert eine und nur

eine solche Lösung. Diese Lösung ist für *alle* (reellen oder komplexen) x, y analytisch, und zwar erfüllt sie bei festem x Anfangsbedingungen der Ordnung ϱ .¹⁾ Ist $\eta = \frac{1}{\varrho} - \frac{\lambda - \mu}{\lambda}$, so sind die Funktionen $z, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^{\lambda-1} z}{\partial y^{\lambda-1}}$ bei festem y ganze Funktionen von x , und zwar höchstens von der Ordnung $\frac{\mu}{\lambda} \frac{1}{\eta}$, mindestens eine der genannten Funktionen aber genau von dieser Ordnung. Im Falle III sind drei Unterfälle zu unterscheiden:

III a. Die Anfangsbedingungen sind vom Maximaltypus.

III b. Die Anfangsbedingungen sind vom Minimaltypus.

III c. Die Anfangsbedingungen sind vom Normaltypus.

Im Falle III a ist nun unsere Behauptung die gleiche wie im Falle I, im Falle III b die gleiche wie im Falle II, nur sind die Funktionen $z, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^{\lambda-1} z}{\partial y^{\lambda-1}}$ zwar ganze Funktionen von x , aber mindestens eine von ihnen ist nicht von endlicher Ordnung. Im Falle III c schließlich existiert eine und nur eine in der Umgebung des Nullpunktes analytische Lösung des Problems (1), (2); diese ist jedoch nicht für alle x, y regulär²⁾. Bei festem x erfüllt sie — wenn überhaupt regulär — Anfangsbedingungen vom Normaltypus der Ordnung $\frac{\lambda}{\lambda - \mu}$. Sind insbesondere im Falle III c die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklungen der b_ν an der Stelle $y = 0$ positive Zahlen, so läßt sich eine positive Zahl R angeben, so daß die Lösung von (1), (2) regulär analytisch ist für $|x| < R$ und alle y , dagegen sicher singular auf der Geraden $x = R$.

Wir werden nun in einer Reihe von Sätzen (Satz 1—5) das eben ausgesprochene Ergebnis beweisen. Die in diesem enthaltenen notwendigen Bedingungen fassen wir zusammen in den

Satz 1. *Im Falle $\lambda > \mu$ ist für die Existenz einer in der Umgebung des Nullpunktes analytischen Lösung des Problems (1), (2) notwendig, daß die Anfangsbedingungen (2) von endlicher Ordnung und zwar höchstens vom Normaltypus der Ordnung $\frac{\lambda}{\lambda - \mu}$ sind.*

¹⁾ Wir sagen, $z(x, y)$ erfüllt für ein bestimmtes x Anfangsbedingungen der Ordnung ϱ , wenn die Funktionen $z, \frac{\partial z}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{\mu-1} z}{\partial x^{\mu-1}}$ bei diesem x als Funktionen von y ganze Funktionen höchstens von der Ordnung ϱ sind, eine von ihnen aber wirklich von dieser Ordnung ist. Entsprechend ist der Ausdruck zu verstehen, $z(x, y)$ erfülle für ein bestimmtes x Anfangsbedingungen von einem bestimmten Typus.

²⁾ Die Singularitäten brauchen aber nicht im Reellen zu liegen. Siehe das Beispiel auf S. 61.

Beweis. Wir werden zeigen: Ist $z(x, y)$ eine in der Umgebung des Nullpunktes analytische Lösung von (1), so sind die durch (2) definierten Funktionen $b_\nu(y)$ ganze Funktionen endlicher Ordnung, welche höchstens vom Normaltypus der Ordnung $\frac{\lambda}{\lambda - \mu}$ sind.

Zunächst sind jedenfalls auf Grund der Voraussetzung die Funktionen b_ν analytisch in der Umgebung von $y = 0$. Sei also

$$(4) \quad b_\nu(y) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{\nu k} y^k \quad (\nu = 0, 1, \dots, \mu - 1).$$

Können wir zeigen, daß bei passender Wahl einer positiven Konstanten C die Ungleichungen

$$(5) \quad |b_{\nu k}| < \frac{C^k}{k! \frac{\lambda - \mu}{\lambda}} \quad \left(\begin{array}{l} k = 0, 1, 2, \dots \\ \nu = 0, 1, \dots, \mu - 1 \end{array} \right)$$

bestehen, so ist unsere Behauptung, daß die Funktionen b_ν höchstens vom Normaltypus der Ordnung $\frac{\lambda}{\lambda - \mu}$ sind, bewiesen³⁾. Zum Beweise von (5) bemerken wir nun, daß aus (1) für jedes $p = 1, 2, 3, \dots$

$$(6) \quad \frac{\partial^{p\mu} z}{\partial x^{p\mu}} = \frac{\partial^{p\lambda} z}{\partial x^{p\lambda}}$$

folgt. Ist nun

$$k = \lambda p + r \quad (0 \leq r < \lambda),$$

so differenzieren wir (6) ν -mal nach x und r -mal nach y :

$$\frac{\partial^{p\mu}}{\partial x^{p\mu}} \left(\frac{\partial^{\nu+r} z}{\partial x^\nu \partial y^r} \right) = \frac{\partial^k}{\partial y^k} \left(\frac{\partial^\nu z}{\partial x^\nu} \right) \quad \left(\begin{array}{l} \nu = 0, 1, \dots, \mu - 1 \\ r = 0, 1, \dots, \lambda - 1 \end{array} \right),$$

woraus nach (2) und (4) folgt

$$(7) \quad \left[\frac{\partial^{p\mu}}{\partial x^{p\mu}} \left(\frac{\partial^{\nu+r} z}{\partial x^\nu \partial y^r} \right) \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}} = \left[\frac{\partial^k b_\nu}{\partial y^k} \right]_{y=0} = k! b_{\nu k}.$$

Da nun z in der Umgebung des Nullpunktes analytisch ist, so gibt es zwei positive Konstanten M und R , so daß

$$\left| \frac{\partial^{p\mu}}{\partial x^{p\mu}} \left(\frac{\partial^{\nu+r} z}{\partial x^\nu \partial y^r} \right) \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}} < \frac{M}{R^{p\mu}} \cdot (p!)^{\mu} \quad \left(\begin{array}{l} \nu = 0, 1, \dots, \mu - 1 \\ r = 0, 1, \dots, \lambda - 1 \end{array} \right).$$

³⁾ Denn die Bedingung dafür, daß b_ν höchstens vom Normaltypus β der Ordnung $\varrho = \frac{\lambda}{\lambda - \mu}$ ist, lautet $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k! \varrho} |b_{\nu k}|} \leq (\varrho \beta)^\varrho$. S. etwa Pringsheim, Elementare Theorie der ganzen transzendenten Funktionen endlicher Ordnung, Math. Annalen 58 (1904), S. 276–277.

Also folgt aus (7)

$$(8) \quad |b_{\nu k}| < \frac{M}{R^{p\mu}} \cdot \frac{(p\mu)!}{k!}.$$

Andererseits überlegt man sich leicht, daß wegen $\lambda > \mu$

$$(p\mu)!^{\lambda} < (p\lambda)!^{\mu} \leq k!^{\mu}$$

ist, so daß aus (8)

$$|b_{\nu k}| < \frac{M}{R^{p\mu}} \frac{k!^{\frac{\mu}{\lambda}}}{k!} = \left(MR^{\frac{\mu}{\lambda}}\right) \cdot \left(\frac{1}{R^{\frac{\mu}{\lambda}}}\right)^k \frac{1}{k!^{\frac{\lambda-\mu}{\lambda}}}$$

folgt und (5) bei passender Wahl von C gewiß erfüllt ist.

Satz 2. In den Fällen II und III b (mit andern Worten: wenn die Anfangsbedingungen höchstens vom Minimaltypus der Ordnung $\frac{\lambda}{\lambda-\mu}$ sind) existiert eine und nur eine analytische Lösung von (1), (2). Diese ist für alle x, y regulär-analytisch.

Beweis. Daß höchstens eine analytische Lösung existieren kann, folgt unmittelbar daraus, daß durch (1), (2) und (4) die Potenzreihenentwicklung der Lösung an der Stelle $x = y = 0$ eindeutig bestimmt ist. Zum Beweise der Existenz bemerken wir, daß die unendliche Reihe

$$(9) \quad \sum_{\nu=0}^{\mu-1} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\partial^{p\lambda} b_{\nu}}{\partial y^{p\lambda}} \frac{x^{p\mu+\nu}}{(p\mu+\nu)!}$$

formal (1) und (2) befriedigt. Es genügt daher offenbar zum Beweise unseres Satzes folgendes zu zeigen: Bei beliebigem x_0, y_0 konvergiert diejenige Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x, y) = \sum_{p,q}^{\infty} d_{p,q} x^p y^q,$$

welche aus (9) entsteht, wenn man die Ableitungen $\frac{\partial^{p\lambda} b_{\nu}}{\partial y^{p\lambda}}$ durch ihre Entwicklungen nach Potenzen von y ersetzt, für $x = x_0, y = y_0$. Für diesen Nachweis ist es keine Beschränkung der Allgemeinheit anzunehmen, daß die Koeffizienten $b_{\nu k}$ in den Entwicklungen (4) der b_{ν} sowie x_0 und y_0 positiv sind. Entwickeln wir nun b_{ν} nach Potenzen von $y - y_0$

$$(10) \quad b_{\nu}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{\nu,k} (y - y_0)^k,$$

so wird

$$\left(\frac{\partial^k b_{\nu}}{\partial y^k}\right)_{y=y_0} = k! c_{\nu,k}.$$

Daher müssen die Reihen

$$\sum_{\nu=0}^{\mu-1} \sum_{p=0}^{\infty} c_{\nu, p \cdot \lambda} \frac{(p\lambda)!}{(p\mu + \nu)!} x_0^{p\mu + \nu}$$

und

$$\mathfrak{P}(x_0, y_0) \equiv \sum_{p, q}^{\infty} d_{pq} x_0^p y_0^q$$

auf Grund unserer Positivitätsannahmen gleichzeitig konvergieren oder divergieren und es genügt zu zeigen, daß die Reihen

$$(11) \quad \sum_{p=0}^{\infty} c_{\nu, p \cdot \lambda} \frac{(p\lambda)!}{(p\mu + \nu)!} x_0^{p\mu + \nu} \quad (\nu = 0, 1, \dots, \mu - 1)$$

konvergieren. Für das Folgende ist zu beachten, daß die Ordnungen und speziellen Typen der Funktionen b_ν als Funktion von y und als Funktion von $y - y_0$ die gleichen sind.

Betrachten wir zunächst den Fall II, so sind diese Ordnungen höchstens gleich $\varrho < \frac{\lambda}{\lambda - \mu}$. Setzen wir daher

$$(12) \quad \frac{1}{\varrho} - \frac{\lambda - \mu}{\lambda} = \eta,$$

so ist η positiv und bei genügend kleinem $\delta > 0$ sind die durch

$$(12a) \quad \frac{1}{\varrho + \delta} - \frac{\lambda - \mu}{\lambda} = \eta' = \eta - \delta'$$

definierten Zahlen η', δ' ebenfalls positiv. Da nun die Funktionen (10) höchstens von der Ordnung ϱ sind, existiert gewiß eine Konstante α , so daß

$$(13) \quad |c_{\nu, k}| < \frac{\alpha^k}{k!^{\frac{1}{\varrho + \delta}}} \quad \text{für } k > K(\delta)$$

ist⁴⁾. Das allgemeine Glied der Reihe (11) wird daher nach (12a) von einem gewissen k ab kleiner als

$$(14) \quad \frac{(p\lambda)!^{\frac{1}{1 - \frac{1}{\varrho + \delta}}}}{(p\mu)!} \cdot x_0^{p\mu + \nu} \alpha^{p\lambda} = \frac{(p\lambda)!^{\frac{\mu}{\lambda}}}{(p\mu)!} \frac{x_0^{p\mu + \nu} \alpha^{p\lambda}}{(p\lambda)!^{\eta'}} = a_p$$

und es genügt zu zeigen, daß $\sum_{p=0}^{\infty} a_p$ konvergiert. Um dies zu beweisen,

⁴⁾ Die Bedingung dafür, daß die Funktionen (10) höchstens von der Ordnung ϱ sind, lautet: für jedes $\delta > 0$ ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k!^{\frac{1}{\varrho + \delta}}} |c_{\nu, k}|} = 0$$

bilden wir

$$(15) \quad q_p = \frac{a_{p+1}}{a_p} = \frac{[(p\lambda+1)(p\lambda+2)\dots(p\lambda+\lambda)]^{\frac{\mu}{\lambda}}}{(p\mu+1)(p\mu+2)\dots(p\mu+\mu)} \cdot \frac{1}{[(p\lambda+1)\dots(p\lambda+\lambda)]^{\eta'}} \cdot x_0^{\mu} \alpha^{\lambda},$$

$$q_p = \frac{\left[\left(\lambda + \frac{1}{p}\right)\left(\lambda + \frac{2}{p}\right)\dots\left(\lambda + \frac{\lambda}{p}\right)\right]^{\frac{\mu}{\lambda}}}{\left(\mu + \frac{1}{p}\right)\left(\mu + \frac{2}{p}\right)\dots\left(\mu + \frac{\mu}{p}\right)} \cdot \frac{1}{[(p\lambda+1)\dots(p\lambda+\lambda)]^{\eta'}} \cdot x_0^{\mu} \alpha^{\lambda}.$$

Da $\lim_{p \rightarrow \infty} q_p = 0$ ist, folgt die behauptete Konvergenz.

Um nunmehr den Beweis für die Konvergenz der Reihen (11) auch im Falle IIIb zu führen, bemerken wir, daß aus der Voraussetzung, daß die Funktionen (10) höchstens vom Minimaltypus der Ordnung $\varrho = \frac{\lambda}{\lambda - \mu}$ sind,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k!^{\frac{1}{\varrho}} |c_{\nu, k}|} = 0$$

folgt (Pringsheim, loc. cit.). Daher gilt jetzt an Stelle von (13) für jedes positive α

$$|c_{\nu, k}| < \frac{\alpha^k}{k!^{\frac{1}{\varrho}}} \quad \text{für } k > K(\alpha).$$

Wir wählen insbesondere α so klein, daß

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\mu} x_0^{\mu} \alpha^{\lambda} < 1$$

ist. Die beim Beweise im Falle II gegebene Abschätzung (14) sowie der Ausdruck (15) für den Quotienten q_p bleiben auch jetzt noch richtig, wenn man überall $\eta' = 0$ setzt. Aus (15) folgt dann

$$\lim_{p \rightarrow \infty} q_p = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\mu} x_0^{\mu} \alpha^{\lambda}.$$

Auf Grund der getroffenen Wahl von α ist dieser Limes < 1 , woraus die behauptete Konvergenz folgt.

Zusatz zu Satz 2.

1. Für den Fall II.

a) Bei festem y sind $z, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^{\lambda-1} z}{\partial y^{\lambda-1}}$ ganze Funktionen endlicher Ordnung von x und zwar höchstens von der Ordnung $\varrho^* = \frac{\mu}{\lambda} \frac{1}{\eta}$, wobei η die durch (12) definierte Zahl ist.

b) Mindestens eine der genannten Funktionen ist genau von der Ordnung ϱ^* .

2. Für den Fall IIIb.

Da die Funktionen $z, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^{\lambda-1} z}{\partial y^{\lambda-1}}$ nach Satz 2 im Endlichen nirgends Singularitäten haben, sind sie natürlich ganze Funktionen von x . Wir behaupten aber, daß mindestens eine von ihnen nicht von *endlicher* Ordnung ist.

Beweis von 1a. Wir beschränken uns darauf, den Beweis für z selbst zu erbringen, da der Beweis für die Ableitungen analog verläuft. Nach (11) und der in der Anmerkung ⁴⁾ gegebenen Bedingung genügt es offenbar zu zeigen: für jedes $\delta^* > 0$ ist

$$(16) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \left[(p\mu + \nu)!^{\frac{1}{\varrho^* + \delta^*}} |c_{\nu, p\lambda}| \cdot \frac{(p\lambda)!}{(p\mu + \nu)!} \right]^{\frac{1}{p\mu + \nu}} = 0$$

($\nu = 0, 1, \dots, \mu - 1$).

Um diese Relation zu beweisen, definieren wir zunächst bei gegebenen $\delta^* > 0$ eine Zahl $\bar{\delta}$ durch die Gleichung

$$\frac{1}{\varrho^* + \delta^*} = \frac{\lambda}{\mu} (\eta - \bar{\delta}).$$

Auf Grund der Definition von ϱ^* ist $\bar{\delta}$ positiv. Nunmehr wählen wir eine positive Zahl δ so klein, daß die durch (12a) definierte Zahl δ' kleiner als $\bar{\delta}$ wird. Nach (14) ist nun (unter Berücksichtigung von $\eta' = \eta - \delta'$) die in (16) unter dem Limeszeichen stehende Wurzel kleiner als

$$\left[(p\mu + \nu)!^{\frac{1}{\varrho^* + \delta^*}} \cdot \frac{(p\lambda)!^{\frac{\mu}{\lambda}}}{(p\mu)!} \cdot \frac{\alpha^{p\lambda}}{(p\lambda)!^{\eta - \delta'}} \right]^{\frac{1}{p\mu + \nu}} = \left[\frac{\{(p\mu + \nu)!^{\frac{\mu}{\lambda}}\}^{\eta - \bar{\delta}}}{(p\lambda)!^{\eta - \delta'}} \cdot \frac{(p\lambda)!^{\frac{\mu}{\lambda}}}{(p\mu)!} \alpha^{p\lambda} \right]^{\frac{1}{p\mu + \nu}}.$$

Bezeichnen $\alpha', \alpha'', \dots$ passend gewählte von p unabhängige Zahlen, so ist, wie man auf Grund der *Stirlingschen Formel* leicht einsieht,

$$(p\mu + \nu)!^{\frac{\lambda}{\mu}} < \alpha'^p (p\lambda)! \quad \text{und} \quad (p\lambda)!^{\frac{\mu}{\lambda}} < \alpha''^p (p\mu)!,$$

und die abzuschätzende Wurzel wird daher kleiner als

$$\left[\alpha'''^p \frac{(p\lambda)!^{\eta - \bar{\delta}}}{(p\lambda)!^{\eta - \delta'}} \right]^{\frac{1}{p\mu + \nu}} = \left[\frac{\alpha'''^p}{(p\lambda)!^{\bar{\delta} - \delta'}} \right]^{\frac{1}{p\mu + \nu}},$$

woraus wegen $\bar{\delta} > \delta'$ die Behauptung (16) folgt.

Beweis von 1b. Differentiiert man (9) r -mal nach y , so sieht man, daß $\frac{\partial^r z}{\partial y^r}$ sich aus den Reihen

$$(17) \quad \sum_{p=0}^{\infty} c_{\nu, p\lambda+r} \frac{(p\lambda+r)!}{(p\mu+\nu)!} x_0^{p\mu+\nu} \quad (\nu = 0, 1, \dots, \mu-1)$$

in der gleichen Weise zusammensetzt wie z aus den Reihen (11). Zum Beweis unserer Behauptung genügt es daher zu zeigen: für mindestens ein r der Reihe $0, 1, \dots, \lambda-1$ ist mindestens eine der μ -Reihen (17) von der Ordnung ϱ^* , d. h. (s. Pringsheim, loc. cit.) wir haben zu zeigen: für mindestens ein ν und r ist für jedes $\delta^* > 0$

$$(18) \quad \overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \left[(p\mu + \nu)!^{\frac{1}{\varrho^* - \delta^*}} |c_{\nu, p\lambda+r}| \cdot \frac{(p\lambda+r)!}{(p\mu+\nu)!} \right]^{\frac{1}{p\mu+\nu}} = \infty.$$

Zum Beweise definieren wir zu der gegebenen Zahl δ^* die nach Definition von ϱ^* positive Zahl $\bar{\delta}$ durch die Gleichung

$$\frac{1}{\varrho^* - \delta^*} = \frac{\lambda}{\mu} (\eta + \bar{\delta})$$

und wählen eine positive Zahl δ so klein, daß die durch

$$\frac{1}{\varrho - \delta} - \frac{\lambda - \mu}{\lambda} = \eta + \delta'$$

definierte Zahl δ' kleiner als $\bar{\delta}$ wird. (η ist durch (12) gegeben). Da nun nach Voraussetzung mindestens eine der Funktionen (10) genau von der Ordnung ϱ ist, so gilt für mindestens ein ν

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k!^{\frac{1}{\varrho - \delta}} |c_{\nu, k}|} = \infty.$$

Ist diese Relation etwa für $\nu = \nu_0$ erfüllt, so ist:

$$|c_{\nu_0, k}| > \frac{1}{k!^{\frac{1}{\varrho - \delta}}}$$

für unendlich viele k . Daher gibt es unter den endlich vielen Zahlen $r = 0, 1, \dots, \lambda-1$ mindestens eine — etwa $r = r_0$ —, so daß diese Ungleichung für unendlich viele Zahlen k der Form $p\lambda + r_0$ erfüllt ist. Auf Grund dieser Tatsache erkennt man — unter Benutzung der Stirlingschen Formel, ähnlich wie beim Beweise von 1a —, daß für $\nu = \nu_0$ und $r = r_0$ die in (18) unter dem $\overline{\lim}$ -Zeichen stehende Wurzel bei passend gewählten von p unabhängigen α' größer als

$$\left[(p\lambda)!^{\bar{\delta} - \delta'} \alpha'^p \right]^{\frac{1}{p\mu + \nu_0}}$$

ist, woraus wegen $\bar{\delta} > \delta'$ die Behauptung (18) folgt.

Beweis von 2. Wären $z, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^{\lambda-1} z}{\partial y^{\lambda-1}}$ als Funktionen von x sämtlich von endlicher Ordnung und ϱ' die größte unter diesen Ordnungen, so wäre (vgl. (17) und die Anm. 4)) für alle $\nu = 0, 1, \dots, \mu - 1$ und alle $r = 0, 1, \dots, \lambda - 1$ für jedes positive δ'

$$(19) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \left[(p\mu + \nu)!^{\frac{1}{\varrho' + \delta'}} |c_{\nu, p\lambda + r}| \frac{(p\lambda + r)!}{(p\mu + \nu)!} \right]^{\frac{1}{p\mu + \nu}} = 0.$$

Wir wollen zeigen, daß diese Relation für kein positives δ' für *alle* ν und r richtig sein kann. Zu diesem Zweck wählen wir bei gegebenen δ' eine positive Zahl ε , für die

$$\varepsilon < \frac{\mu}{\lambda} \frac{1}{\varrho' + \delta'}$$

gilt, und bestimmen dann die positive Zahl δ aus der Gleichung

$$\frac{1}{\frac{\lambda}{\lambda - \mu} - \delta} = \frac{\lambda - \mu}{\lambda} + \varepsilon.$$

Da nun eine der Reihen (10) genau von der Ordnung $\varrho = \frac{\lambda}{\lambda - \mu}$ ist, gilt (Pringsheim, loc. cit.):

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left(k!^{\frac{1}{\varrho - \delta}} |c_{\nu, k}| \right)^{\frac{1}{k}} = \infty$$

für mindestens ein ν , etwa für $\nu = \nu_0$, so daß für unendlich viele k

$$|c_{\nu_0, k}| > \frac{1}{k!^{\frac{1}{\varrho - \delta}}} = \frac{1}{k!^{\frac{\lambda - \mu}{\lambda} + \varepsilon}}$$

ist, und für mindestens eine der λ Zahlen $r = 0, 1, \dots, \lambda - 1$ — etwa für $r = r_0$ — diese Ungleichung noch für unendlich viele k der Form $p\lambda + r_0$ erfüllt ist. Die in (19) unter dem Limeszeichen stehende Wurzel wird daher für $\nu = \nu_0$ und $r = r_0$ für unendlich viele Werte von p größer als

$$\left[\frac{(p\mu + \nu_0)!^{\frac{1}{\varrho' + \delta'}}}{(p\lambda + r_0)!^\varepsilon} \cdot \frac{(p\lambda + r_0)!^{\frac{\mu}{\lambda}}}{(p\mu + \nu_0)!} \right]^{\frac{1}{p\mu + \nu_0}}.$$

Dieser Ausdruck ist aber bei passender Wahl einer von p unabhängigen positiven Zahl α' , wie man wieder mit Hilfe der Stirlingschen Formel leicht einsieht, größer als

$$\left[\alpha'^p \frac{(p\lambda)!^{\frac{\mu}{\lambda} \frac{1}{\varrho' + \delta'}}}{(p\lambda)!^\varepsilon} \right]^{\frac{1}{p\mu + \nu_0}};$$

auf Grund der getroffenen Wahl von ε kann daher (19) mit $r = r_0$, $r = r_0$ nicht erfüllt sein.

Satz 3. Sind die Anfangsbedingungen (2) vom Normaltypus β der Ordnung $\varrho = \frac{\lambda}{\lambda - \mu}$ (Fall IIIc), so behaupten wir:

a) Es existiert eine und nur eine analytische Lösung $z(x, y)$ von (1), (2); diese wird dargestellt durch die Reihe (9), welche den endlichen von y unabhängigen Konvergenzradius

$$(20) \quad R = \frac{\mu}{\lambda} \frac{1}{\frac{\lambda}{\lambda - \mu}} = \frac{\mu}{\lambda} \left[\frac{1}{\beta} \cdot \frac{\lambda - \mu}{\lambda} \right]^{\frac{\lambda - \mu}{\mu}} (\varrho \beta)^{\varrho \mu}$$

besitzt, so daß also $z(x, y)$ für keinen y -Wert eine für alle im Endlichen gelegenen Punkte der komplexen x -Ebene reguläre Funktion ist.

b) Bei festem x erfüllt $z(x, y)$, wenn überhaupt regulär, Anfangsbedingungen vom Normaltypus der Ordnung $\frac{\lambda}{\lambda - \mu}$.

c) Sind insbesondere die Koeffizienten der Funktionen b , alle nicht negativ, so ist die Gerade $x = R$ der reellen (x, y) -Ebene eine singuläre Linie der Funktion z . Bei festem x im Intervall $0 \leq x < R$ erfüllt z Anfangsbedingungen vom Normaltypus $\beta(x)$ der Ordnung $\frac{\lambda}{\lambda - \mu}$, wobei

$$(21) \quad \beta(x) = \frac{\lambda - \mu}{\lambda} \cdot \left[\frac{\mu}{\lambda} \frac{1}{R - x} \right]^{\frac{\mu}{\lambda - \mu}}.$$

Beweis. a) Die Eindeutigkeit erkennt man ebenso wie beim Beweise von Satz 2. Ferner erkennt man genau wie beim Beweise von Satz 2, daß es für den Nachweis der Konvergenz der Reihe (9) für alle $|x| < R$ auf die Untersuchung der Konvergenz der Reihen (11) ankommt. Da in unserm Falle die b , höchstens vom Normaltypus β der Ordnung $\varrho = \frac{\lambda}{\lambda - \mu}$ sind, so gelten für die Koeffizienten $c_{\nu, k}$ der Entwicklungen (10) die Abschätzungen (vgl. Anm. 3))

$$|c_{\nu, k}| < \frac{\left[(\varrho \beta)^{\frac{1}{\varrho}} + \varepsilon \right]^k}{k!^{\varrho}} \quad \text{für } k > K(\varepsilon)$$

bei vorgegebenem positiven ε . Daher ist das allgemeine Glied der Reihe (11) von einem gewissen p an kleiner als

$$(22) \quad \frac{\left[(\varrho \beta)^{\frac{1}{\varrho}} + \varepsilon \right]^{p \cdot \lambda}}{\frac{1}{\lambda}} \cdot \frac{(p \lambda)!}{(p \mu)!} x_0^{p \mu + \nu} = \frac{(p \lambda)!^{\frac{\mu}{\lambda}}}{(p \mu)!} \left[(\varrho \beta)^{\frac{1}{\varrho}} + \varepsilon \right]^{p \cdot \lambda} x_0^{p \mu + \nu}.$$

(p \cdot \lambda)!^{\varrho}

Bilden wir den Quotienten q_p des Ausdrucks (22) für $(p+1)$ und p :

$$\begin{aligned} q_p &= \frac{[(p\lambda+1)\dots(p\lambda+\lambda)]^{\frac{\mu}{\lambda}}}{(p\mu+1)\dots(p\mu+\mu)} \left[(\varrho\beta)^{\frac{1}{\varrho}} + \varepsilon \right]^{\lambda} x_0^{\mu} \\ &= \frac{\left[\left(\lambda + \frac{1}{p} \right) \dots \left(\lambda + \frac{\lambda}{p} \right) \right]^{\frac{\mu}{\lambda}}}{\left(\mu + \frac{1}{p} \right) \dots \left(\mu + \frac{\mu}{p} \right)} \left[(\varrho\beta)^{\frac{1}{\varrho}} + \varepsilon \right]^{\lambda} x_0^{\mu}. \end{aligned}$$

Also ist

$$\lim_{p \rightarrow \infty} q_p = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{\mu} \left[(\varrho\beta)^{\frac{1}{\varrho}} + \varepsilon \right]^{\lambda} x_0^{\mu}.$$

Denken wir uns nun bei festem $|x_0| < R$, wo R die durch (20) bestimmte Zahl ist, ε von vornherein genügend klein gewählt, so wird offenbar $\lim q_p < 1$. Hiermit ist bewiesen, daß der Konvergenzradius der $p \rightarrow \infty$ Reihen (11), also auch der von (9) mindestens R ist. Um nun zu zeigen, daß die Reihe (9) für $x = \xi$ mit $|\xi| > R$ bei beliebigem $y = \eta$ divergiert, betrachten wir einen Punkt x_0, y_0 , für welchen $R < x_0 < |\xi|$, $0 < y_0 < |\eta|$ ist. Wäre nun die Reihe (9) für $x = \xi$, $y = \eta$ konvergent, so würde sie im Punkte $x = x_0$, $y = y_0$ eine analytische Funktion von x und y darstellen, so daß insbesondere auch die Reihen

$$\sum_{r=0}^{\mu-1} \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{\varrho^{p\lambda+r} b_r}{\partial y^{p\lambda+r}} \right)_{y=y_0} \frac{x_0^{p\mu+r}}{(p\mu+r)!} \quad (r = 0, 1, \dots, \lambda-1),$$

wofür nach (10) auch geschrieben werden kann

$$(23) \quad \sum_{r=1}^{\mu-1} \sum_{p=0}^{\infty} c_{r, p\lambda+r} \cdot \frac{(p\lambda+r)!}{(p\mu+r)!} x_0^{\mu p+r} \quad (r = 1, 0, \dots, \lambda-1),$$

konvergieren müßten. Nun ist unter den Funktionen b_r mindestens eine vom Normaltypus β der Ordnung $\varrho = \frac{\lambda}{\lambda-\mu}$. Sei dies etwa b_{α} . Dann gibt es für jede positive Zahl ε unendlich viele unter den Koeffizienten $c_{\alpha, k}$ für welche die Ungleichungen

$$(24) \quad |c_{\alpha, k}| > \frac{\left[(\varrho\beta)^{\frac{1}{\varrho}} - \varepsilon \right]^k}{k!^{\varrho}}$$

gelten⁵⁾. In mindestens einer der endlich vielen Folgen

⁵⁾ Die Bedingung dafür, daß b_{α} vom Normaltypus β der Ordnung ϱ ist, lautet

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k!^{\varrho} |c_{\alpha, k}|}} = (\varrho\beta)^{\frac{1}{\varrho}}.$$

$$c_{a,p\lambda}; c_{a,p\lambda+1}; c_{a,p\lambda+2}; \dots; c_{a,p\lambda+\lambda-1} \quad (p=1, 2, 3, \dots)$$

kommen daher immer noch unendlich viele Zahlen vor, welche den Ungleichungen (24) genügen. Daher kommen in mindestens einer der Reihen (23) unendlich viele Glieder vor, deren absoluter Betrag größer ist als

$$a_p = \frac{(p\lambda+r)!}{(p\mu+\alpha)!} \left[(\varrho\beta)^{\frac{1}{\varrho}} - \varepsilon \right]^{\frac{\mu}{\lambda} p\lambda+r} x_0^{p\mu+\alpha},$$

und es genügt zu zeigen, daß die Folge der a_p für $x_0 > R$ nicht gegen Null konvergiert. Zu diesem Zwecke bilden wir

$$\frac{a_{p+1}}{a_p} = \frac{\left[\left(\lambda + \frac{r+1}{p} \right) \dots \left(\lambda + \frac{r+\lambda}{p} \right) \right]^{\frac{\mu}{\lambda}} \left[(\varrho\beta)^{\frac{1}{\varrho}} - \varepsilon \right]^{\lambda}}{\left(\mu + \frac{\alpha+1}{p} \right) \dots \left(\mu + \frac{\alpha+\mu}{p} \right)} x_0^{\mu},$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{a_{p+1}}{a_p} = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{\mu} \left[(\varrho\beta)^{\frac{1}{\varrho}} - \varepsilon \right]^{\lambda} x_0^{\mu}.$$

Dieser Limes ist für $x_0 > R$, wenn ε von vornherein genügend klein gewählt ist, > 1 . Daher können die a_p gewiß nicht gegen Null konvergieren.

b) Daß die Lösung $z(x, y)$ an einer Stelle, an der sie regulär-analytisch ist, Anfangsbedingungen erfüllt, die *höchstens* vom Normaltypus der Ordnung $\frac{\lambda}{\lambda-\mu}$ sind, ist eine unmittelbare Folge von Satz 1. Andererseits müssen die Anfangsbedingungen an einer solchen Stelle mindestens vom Normaltypus der Ordnung $\frac{\lambda}{\lambda-\mu}$ sein; denn andernfalls würde nach Satz 2 diejenige Lösung von (1), welche nebst ihren $\mu-1$ ersten Ableitungen nach x in die in Rede stehenden Funktionen von y übergeht, für alle reellen oder komplexen x, y regulär analytisch sein, was doch nicht der Fall ist, da wir wissen, daß diese eindeutig bestimmte Lösung für kleine x durch die Reihe (9) dargestellt wird, welche bei festem y in der komplexen x -Ebene einen endlichen Konvergenzkreis besitzt.

c) Ist $|\xi| < R$, so können wir unsere Lösung $z(x, y)$ analog (9) in der Form

$$(25) \quad \sum_{\nu=0}^{\mu-1} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\partial^{p\lambda} z(\xi, y)}{\partial y^{p\lambda}} \frac{(x-\xi)^{p\mu+\nu}}{(p\mu+\nu)!}$$

darstellen, und da die Stelle $x=0$ vor der Stelle $x=\xi$ nicht ausgezeichnet ist, folgt aus dem oben Bewiesenen, daß der Konvergenzradius dieser Reihe von y unabhängig ist. Daraus ergibt sich leicht, daß $z(x, y)$ für ein bestimmtes x entweder für alle oder keinen y -Wert singulär ist.

z ist also sicher auf der Geraden $x = R$ der reellen (x, y) -Ebene singulär, wenn dies für die Punkte $x = R$, $y > 0$ erwiesen ist. Sind nun aber die Koeffizienten der b_ν nicht negativ, so sind bei positivem y auch die Koeffizienten der Reihe (9) aufgefaßt als Potenzreihe in x alle nicht negativ. Aus einem bekannten funktionentheoretischen Satze folgt daher, daß der positiv-reelle Punkt $x = R$ des Konvergenzkreises eine singuläre Stelle ist.

Aus der eben bewiesenen Tatsache, daß $x = R$ für alle y singulär ist, folgt, daß der Konvergenzradius $R(\xi)$ der Reihe (25) für $0 \leq \xi < R$ genau $R - \xi$ ist. z erfüllt nun, wie unter b) gezeigt, für $x = \xi$ Anfangsbedingungen vom Normaltypus der Ordnung $\frac{\lambda}{\lambda - \mu}$. Ist $\beta(\xi)$ dieser Normaltypus, so ist $\beta(0) = \beta$, und man überlegt sich sofort, daß zwischen $R(\xi)$ und $\beta(\xi)$ der gleiche Zusammenhang besteht wie zwischen $R = R(0)$ und β . Daher folgt aus (20)

$$R - \xi = R(\xi) = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \left[\frac{1}{\beta(\xi)} \cdot \frac{\lambda - \mu}{\lambda}\right]^{\frac{\lambda - \mu}{\mu}}.$$

Hieraus ergibt sich für $x = \xi$ die behauptete Gleichung (21) und Satz 3 ist in allen Teilen bewiesen.

Beispiel. Wie man leicht verifiziert, stellt für jede analytische Funktion $f(x)$

$$z(x, y) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{y^{p\lambda}}{(p\lambda)!} \frac{\partial^{p\mu} f(x)}{\partial x^{p\mu}}$$

eine Lösung von (1) dar, welche wegen $\lambda > \mu$ überall regulär ist, mit Ausnahme der eventuellen Singularitäten der Funktion $f(x)$. Setzt man $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, so erhält man das Beispiel einer Lösung von (1), welche im Reellen überall regulär ist; da sie aber im Komplexen Singularitäten besitzt, können wir schließen, daß sie Anfangsbedingungen vom Normaltypus der Ordnung $\frac{\lambda}{\lambda - \mu}$ erfüllt. Setzt man $f(x) = \frac{1}{1-x}$, so erhalten wir eine Lösung von (1), die nur für $x = 1$ singulär ist. Aus Gleichung (21) mit $x = 0$ und $R = 1$ folgt

$$\beta = \beta(0) = \frac{\lambda - \mu}{\lambda} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\frac{\mu}{\lambda - \mu}}.$$

In Übereinstimmung hiermit zeigt eine leichte Umrechnung, daß

$$b_\nu(y) = \frac{\partial^\nu z(0, y)}{\partial x^\nu} = \sum_{p=0}^{\infty} y^{p\lambda} \frac{(p\mu + \nu)!}{(p\lambda)!}$$

ist, die b_ν also, wie man auf Grund bekannter Kriterien leicht verifiziert, tatsächlich vom Normaltypus $\beta = \frac{\lambda - \mu}{\lambda} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\frac{\mu}{\lambda - \mu}}$ der Ordnung $\frac{\lambda}{\lambda - \mu}$ sind.

Satz 4. Im Falle II erfüllt die nach Satz 2 eindeutig bestimmte analytische Lösung von (1), (2) für jedes x Anfangsbedingungen der Ordnung ϱ .

Beweis. Ist $z(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x) y^k$ die durch (2) eindeutig bestimmte analytische Lösung von (1), also

$$(26) \quad \frac{\partial^{\nu} z}{\partial x^{\nu}} = \sum_{k=0}^{\infty} g_k^{(\nu)}(x) y^k \quad (\nu = 0, 1, \dots, \mu - 1),$$

so wollen wir zunächst zeigen, daß die Funktionen (26) ganze Funktionen höchstens von der Ordnung ϱ sind. Hierzu genügt es nach bekannten Sätzen zu beweisen: Zu jeder positiven Zahl σ kann man eine positive Zahl $K = K(\sigma)$ angeben, so daß

$$(27) \quad |g_k^{(\nu)}(x)| < \frac{A^k}{k!^{\varrho + \sigma}} \quad \text{für } k > K \quad (\nu = 0, 1, \dots, \mu - 1)$$

bei passender Wahl der Zahl $A = A(x)$ ist. Sei also σ eine beliebige, aber feste positive Zahl, welche wir nur der nach Voraussetzung zulässigen Bedingung

$$(28) \quad \varrho + \sigma < \frac{\lambda}{\lambda - \mu}$$

unterwerfen. Nach (26) und (9) ist nun

$$(29) \quad g_k^{(\nu)}(x) = \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k}{\partial y^k} \left(\frac{\partial^{\nu} z}{\partial x^{\nu}} \right) \right]_{y=0} = \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\mu-1} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\partial^{p\lambda+k} b_n}{\partial y^{p\lambda+k}} \frac{x^{p\mu+n-\nu}}{(p\mu+n-\nu)!}.$$

Da ferner die b_n höchstens von der Ordnung ϱ sind, gilt für jedes $\varrho' > \varrho$ bei passender Wahl einer Konstanten $K_1 = K_1(\varrho')$ unter Beachtung von (4)

$$(30) \quad \left| \frac{\partial^{p\lambda+k} b_n(y)}{\partial y^{p\lambda+k}} \right|_{y=0} = (p\lambda+k)! |b_{n,p\lambda+k}| < (p\lambda+k)! \cdot \frac{A^{(1)p\lambda+k}}{(p\lambda+k)!^{\frac{1}{\varrho'}}} \quad (6)$$

für $k > K_1(\varrho')$.

Wir wählen insbesondere

$$\varrho' = \varrho + \frac{\sigma}{2};$$

dann ist nach (28)

$$(31) \quad \eta' = \frac{1}{\varrho'} - \frac{\lambda - \mu}{\lambda} > 0.$$

⁶⁾ $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(8)}$ bezeichnen passend gewählte positive von y , σ und den Summationsbuchstaben unabhängige Zahlen.

Nach (29) und (30) wird nun:

$$g_k^{(p)}(x) < \frac{1}{k!} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(p\lambda + k)!}{[(p-1)\mu]!} A^{(2)p\mu+k},$$

$$(32) \quad |g_k^{(p)}(x)| < \frac{A^{(2)k}}{k! e^{\frac{1}{\sigma}}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{[(k+1)(k+2) \dots (k+p\lambda)]^{1-\frac{1}{\sigma'}}}{[(p-1)\mu]!} A^{(2)p\mu}.$$

Wir setzen nun

$$(33) \quad \delta = \frac{1}{e^{\sigma'}} - \frac{1}{e + \sigma} = \frac{1}{e + \frac{\sigma}{2}} - \frac{1}{e + \sigma} > 0$$

und zerlegen die in (32) rechtsstehende Summe $\sum_{p=0}^{\infty}$ in

$$\Sigma_1 + \Sigma_2,$$

wobei Σ_1 über diejenigen p zu erstrecken ist, für die

$$p\mu \leq \delta k,$$

dagegen Σ_2 über diejenigen p , für welche

$$(34) \quad p\mu > \delta k.$$

In Σ_1 ist nun $p\lambda \leq \frac{\delta k \lambda}{\mu}$ und daher das allgemeine Glied höchstens gleich

$$\begin{aligned} \frac{\left(k + k \frac{\delta \lambda}{\mu}\right)^{p\lambda \left(1 - \frac{1}{e^{\sigma'}}\right)} A^{(2)p\mu}}{[(p-1)\mu]!} &= \frac{\left(k + k \frac{\delta \lambda}{\mu}\right)^{p\lambda \left(\frac{\mu}{\lambda} - \eta'\right)} A^{(2)p\mu}}{[(p-1)\mu]!} \\ &< \frac{k^{p\mu} \left(1 + \frac{\delta \lambda}{\mu}\right)^{p\mu} A^{(2)p\mu}}{[(p-1)\mu]!} \leq \frac{k^{\delta k} A^{(3)p\mu}}{[(p-1)\mu]!} < \frac{k!^{\delta} e^{\delta k} A^{(4)p\mu}}{[(p-1)\mu]!}. \end{aligned}$$

Daher wird

$$\left|\Sigma_1\right| < k!^{\delta} e^{\delta k} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^{(4)p\mu}}{[(p-1)\mu]!},$$

so daß schließlich

$$(35) \quad \left|\Sigma_1\right| < k!^{\delta} A^{(5)k}.$$

In Σ_2 ist nach (34) $k < \frac{p\mu}{\delta}$, und daher wird nach (32) das allgemeine Glied in Σ_2 höchstens gleich

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{[(p-1)\mu]!} \left(p \frac{\mu}{\delta} + p\lambda \right)^{p\lambda \left(1 - \frac{1}{e'}\right)} A^{(2)p\mu} \\
 &= \frac{1}{[(p-1)\mu]!} \left(p \frac{\mu}{\delta} + p\lambda \right)^{p\lambda \left(\frac{\mu}{\lambda} - \eta'\right)} A^{(2)p\mu} \\
 &< \frac{1}{[(p-1)\mu]!} \frac{p^{p\mu}}{p^{p\lambda\eta'}} \left(\frac{\mu}{\delta} + \lambda \right)^{p\mu} A^{(2)p\mu} \\
 (36) \quad &< \frac{1}{[(p-1)\mu]!} \frac{p^{p\mu}}{p^{p\lambda\eta'}} \frac{1}{\delta^{p\mu}} A^{(6)p\mu} < \frac{1}{p^{p\lambda\eta'}} \frac{1}{\delta^{p\mu}} A^{(7)p\mu}.
 \end{aligned}$$

Diese Abschätzung gilt für alle $k > K_1 = K_1(\varrho')$. Es sei nun $K = K(\sigma)$ eine ganze Zahl, die erstens größer als K_1 ist, und für die zweitens $K!^\delta$ größer ist als die offenbar konvergente Summe

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(A^{(7)} : \delta)^{p\mu}}{p^{p\lambda\eta'}}.$$

Für $k > K$ ist dann nach (36)

$$|\Sigma_2| < k!^\delta.$$

Hieraus sowie aus (35), (32) und (33) folgt

$$|g_k^{(\nu)}(x)| < \frac{k!^\delta}{k! \frac{1}{e'}} A^{(8)k} = \frac{A^{(8)k}}{k! \frac{1}{e+\sigma}} \quad \text{für } k > K \quad (\nu = 0, 1, \dots, \mu - 1),$$

womit (27) bewiesen ist. Hiermit ist gezeigt, daß die Ordnung der Anfangsbedingungen bei beliebigem x nicht größer ist als die der Anfangsbedingungen für $x=0$. Da beim Beweise die Stelle $x=0$ nicht ausgezeichnet ist, so kann man ebenso den umgekehrten Schluß machen, woraus folgt, daß die Ordnung der Anfangsbedingungen sich nicht ändert.

Satz 5. *Im Falle III b erfüllt die nach Satz 2 eindeutig bestimmte analytische Lösung $z(x, y)$ von (1), (2) für alle x Anfangsbedingungen vom Minimaltypus der Ordnung $\frac{\lambda}{\lambda - \mu}$.*

Beweis. Nach Satz 2 ist $z(x, y)$ für alle x, y regulär. Andererseits können wir $z(x, y)$ bei beliebigem x_0 als die durch die Anfangsbedingungen $z(x_0, y)$, $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x=x_0}, \dots, \left(\frac{\partial^{\mu-1} z}{\partial x^{\mu-1}}\right)_{x=x_0}$ eindeutig bestimmte Lösung von (1) ansehen. Aus den Sätzen 1 und 3 folgt daher, da man in diesen 0 durch den beliebigen Wert x_0 ersetzen kann, daß z und seine $\mu - 1$ ersten Ableitungen nach x für $x = x_0$ höchstens vom Minimaltypus der Ordnung $\frac{\lambda}{\lambda - \mu}$ sein können. Würden ferner die genannten Funktionen

für $x = x_0$ höchstens von der Ordnung $\varrho_0 < \frac{\lambda}{\lambda - \mu}$ sein, so würde aus Satz 4 folgen, daß z auch für $x = 0$ Anfangsbedingungen der Ordnung ϱ_0 erfüllen würde, was der Voraussetzung widerspricht.

In den Sätzen 1 bis 5 sind alle auf S. 49 u. 50 angekündigten Ergebnisse enthalten. Diese auf den Fall $\lambda > \mu$ bezüglichen Ergebnisse ergänzen wir durch einige Bemerkungen über die Fälle $\lambda \leq \mu$.

Satz 6. Sei J_y das größte den Nullpunkt enthaltende Intervall der y -Achse, innerhalb dessen die Funktionen $b_\nu(y)$ regulär analytisch sind. Ist y_0 in J_y , so sei $R(y_0)$ der kleinste der Konvergenzradien der Entwicklungen der b_ν nach Potenzen von $y - y_0$. Von der im Falle $\lambda \leq \mu$ nach bekannten Sätzen existierenden und eindeutig bestimmten, in der Umgebung des Nullpunktes analytischen Lösung $z(x, y)$ von (1), (2) behaupten wir alsdann:

a) Ist $\lambda < \mu$, so ist z regulär analytisch für alle y aus J_y und alle x .

Die Funktionen $z, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^{\lambda-1} z}{\partial y^{\lambda-1}}$ sind bei festem y aus J_y ganze Funktionen von x höchstens vom Normaltypus der Ordnung $\frac{\mu}{\mu - \lambda}$. Dann und nur dann ist eine dieser Funktionen genau vom Normaltypus der Ordnung $\frac{\mu}{\mu - \lambda}$, wenn eine der Funktionen $b_\nu(y)$ keine ganze Funktion ist (insbesondere also dann, wenn J_y nicht die ganze y -Achse überdeckt). Sind alle b_ν ganze Funktionen, so sind, je nachdem, ob die Anfangsbedingungen (2) von endlicher Ordnung sind oder nicht, $z, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^{\lambda-1} z}{\partial y^{\lambda-1}}$ (als Funktionen von x) sämtlich von kleinerer Ordnung als $\frac{\mu}{\mu - \lambda}$, oder mindestens eine von ihnen ist vom Minimaltypus der Ordnung $\frac{\mu}{\mu - \lambda}$.

b) Ist $\lambda = \mu$, so ist z regulär analytisch für y in J_y und $|x| < R(y)$. Sind insbesondere die Koeffizienten der Entwicklungen der Funktionen b_ν nicht negativ, so ist die Linie $x = R(y)$ eine singuläre.

Den Beweis wollen wir nicht in allen Einzelheiten wiedergeben. Er beruht im Falle b) im wesentlichen auf folgendem: Die formale Lösung (9) des Problems (1), (2) nimmt für $y = y_0$ unter Benutzung der Entwicklung (10) die Gestalt

$$\sum_{\nu=0}^{\mu-1} \sum_{p=0}^{\infty} c_{\nu, p, \lambda} \cdot \frac{(p\lambda)!}{(p\mu + \nu)!} x^{p\mu + \nu}$$

an. Wegen $\lambda = \mu$ aber sind die Summen $\sum_{p=0}^{\infty} c_{\nu, p, \mu} \cdot \frac{x^{p\mu + \nu}}{(\mu p + 1) \dots (\mu p + \nu)}$,

aus denen sie sich zusammensetzt, im wesentlichen identisch mit Teilreihen von (10). Auf Grund dieser Bemerkung läßt sich der Beweis ohne Mühe ausführlich ähnlich wie der zu Satz 3 erbringen. Die Behauptung im Falle a) läßt sich ohne weiteres auf Grund der Sätze 1, 3 und des Zusatzes zu Satz 2 unter Vertauschung von x mit y , μ mit λ erbringen.

Wir gehen nunmehr zur Behandlung der Gleichung (3) über. Bezeichnet man die positive Zahl $m - m'$ mit μ und macht mit Hilfe der Zahlen λ, μ dieselben Fallunterscheidungen wie früher, so lassen sich in allen Fällen die in den Sätzen 2 bis 5 bezüglich der Gleichung (1) erhaltenen Ergebnisse, soweit sie *hinreichende* Bedingungen für die Existenz von Lösungen unseres Anfangswertproblems enthalten, in geeigneter Weise auf Gleichung (3) übertragen⁷⁾. Da die Methode dieser Übertragung in allen Fällen die gleiche ist, wollen wir uns der Kürze halber auf die Behandlung *eines* Falles beschränken und folgenden Satz beweisen:

Satz 7. Die Koeffizienten a_{pq} der Gleichung (3) seien im Intervall $0 \leq x \leq 1$ stetige Funktionen von x , während $b(x, y)$ eine stetige Funktion von (x, y) sei, die bei festem x analytisch in y ist und überdies eine von x unabhängige gliedweise Majorante $B(y)$ besitzt. Es sei $\mu = m - m' < \lambda$. $B(y)$ sowie die Funktionen $b_\nu(y)$ ($\nu = 0, 1, \dots, m-1$) seien ganze Funktionen von y , welche höchstens vom Minimaltypus der Ordnung $\frac{\lambda}{\lambda - \mu}$ sind. Alsdann existiert eine und nur eine Lösung des Problems (3), (2)⁸⁾, welche nebst ihren m' ersten Ableitungen nach x im ganzen Bereiche $0 \leq x \leq 1$, $-\infty < y < +\infty$ stetig in (x, y) ist, bei festem x eine ganze Funktion von y höchstens vom Minimaltypus der Ordnung $\frac{\lambda}{\lambda - \mu}$ ist und eine von x unabhängige ganze Funktion der gleichen Eigenschaft als Majorante besitzt.

a) Beweis der Existenz. Da Ordnung und spezieller Typus einer ganzen Funktion bei Differentiation und Integration ungeändert bleiben, so überlegt man sich leicht, daß die Annahme $b_0 = b_1 = \dots = b_{m-1} = 0$ keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet. Wir nehmen also an:

$$(37) \quad z(0, y) = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{x=0} \dots = \left(\frac{\partial^{m-1} z}{\partial x^{m-1}} \right)_{x=0} = 0.$$

⁷⁾ Die notwendigen Bedingungen lassen sich nicht übertragen: Die Gleichung $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial x}$ hat nach den Cauchyschen Sätzen bei beliebigen analytischen Anfangsbedingungen eine analytische Lösung. Trotzdem ist hier $\mu = m - m' = 2 - 1$, $\lambda = 2$, also $\mu < \lambda$.

⁸⁾ In (2) ist μ durch m zu ersetzen.

Zur Lösung des Problems (3), (37) machen wir den Ansatz der sukzessiven Approximationen:

$$(38) \quad z_0(x, y) = \int_0^x b(t, y) dt, \dots,$$

$$z_n(x, y) = \int_0^x \sum_{p=0}^{m'} \sum_{q=0}^{\lambda} a_{pq}(t) \frac{\partial^{p+q} z_{n-1}(t, y)}{\partial x^p \partial y^q} dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

In jedem Bereich, in welchem die Reihe $z_0 + z_1 + z_2 + \dots$ nebst den aus ihr durch gliedweise Differentiationen nach x bis zur Ordnung m' und beliebiger Ordnung nach y gebildeten Reihen gleichmäßig konvergiert, wird sie eine Lösung von (3) und (37) sein. Für den Konvergenzbeweis und den Nachweis, daß $z(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n$ alle behaupteten Eigenschaften besitzt, wollen wir die Koeffizienten der Entwicklung von b nach Potenzen von y , die a_{pq} , sowie y als nicht negativ annehmen, was offenbar keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet.

Sei nun M eine obere Schranke für die a_{pq} :

$$(39) \quad a_{pq}(x) < M.$$

Ferner sei

$$(40) \quad K = (m' + 1)(\lambda + 1) M.$$

Wir betrachten dann neben (3), (37) die „majorante“ Differentialgleichung

$$(41) \quad \frac{\partial^{\mu} Z}{\partial x^{\mu}} = K \left[\frac{\partial^{\lambda} Z}{\partial y^{\lambda}} + B_{\epsilon}(y) \right]$$

mit den Anfangsbedingungen

$$(42) \quad Z(0, y) = \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_{x=0} \dots = \left(\frac{\partial^{\mu-1} Z}{\partial x^{\mu-1}} \right)_{x=0} = 0.$$

Hierbei soll $B_{\epsilon}(y)$ eine ganze Funktion vom Normaltypus ϵ der Ordnung $\frac{\lambda}{\lambda - \mu}$ mit folgenden Eigenschaften sein: Sie ist eine Majorante von $B(y)$ (also auch nach Voraussetzung a fortiori von $b(x, y)$) und genügt den Ungleichungen

$$9) \quad \int_0^x f(t) dt \text{ sei eine Abkürzung für } \int_0^x dt \int_{t_{m-1}}^{t_{m-1}} \dots \int_0^{t_1} f(t_0) dt_0.$$

$$(43) \quad \frac{\partial^r B_\varepsilon(y)}{\partial y^r} < \frac{\partial^s B_\varepsilon(y)}{\partial y^s} \quad \left(\begin{array}{l} r = 0, 1, 2, \dots \\ s > r, \quad y \geq 0 \end{array} \right).^{10)}$$

Bilden wir für das Problem (41), (42) die sukzessiven Approximationen:

$$(44) \quad Z_0 = \int_0^x K B_\varepsilon(y) dt, \dots, Z_n = \int_0^x K \frac{\partial^\lambda Z_{n-1}}{\partial y^\lambda} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

¹⁰⁾ Wegen $\frac{\lambda}{\lambda - \mu} > 1$ kann man eine solche Funktion B_ε zu jedem positiven ε folgendermaßen bilden: Ist $B(y) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k y^k$, so gibt es auf Grund der Voraussetzung, daß B höchstens vom Minimaltypus der Ordnung $\varrho = \frac{\lambda}{\lambda - \mu}$ ist, zu ε ein $k_0 = k_0(\varepsilon)$, so daß

$$c_k < \frac{\left[(\varrho \varepsilon)^{\frac{1}{\varrho}} \right]^k}{\frac{1}{k! \varrho}} \quad \text{für } k \geq k_0 + 1.$$

Durch eventuelle Vergrößerung von k_0 können wir erreichen, daß außerdem

$$(*) \quad \frac{1}{\frac{1}{k_0} - \frac{1}{\varrho}} = \frac{1}{\frac{\mu}{k_0^\lambda}} < (\varrho \varepsilon)^{\frac{1}{\varrho}}$$

ist. Als dann wählen wir $k_0 + 1$ positive Zahlen $c'_0, c'_1, \dots, c'_{k_0}$, so daß erstens

$$c'_k \geq c_k \quad (k = 0, 1, \dots, k_0)$$

und zweitens

$$(**) \quad (k+1) c'_{k+1} > c'_k \quad (k = 0, 1, \dots, k_0 - 1)$$

ist. Ferner sei C eine Zahl ≥ 1 , für welche

$$(***) \quad (k_0 + 1) \frac{C \left[(\varrho \varepsilon)^{\frac{1}{\varrho}} \right]^{k_0 + 1}}{1} > c'_{k_0}$$

$$(k_0 + 1)! \varrho$$

ist. Wir setzen dann

$$(***) \quad c'_k = C \frac{\left[(\varrho \varepsilon)^{\frac{1}{\varrho}} \right]^k}{\frac{1}{k! \varrho}} \quad (k = k_0 + 1, k_0 + 2, \dots).$$

Die Funktion

$$B_\varepsilon(y) = \sum_{k=0}^{\infty} c'_k y^k$$

hat alle verlangten Eigenschaften: Daß sie eine Majorante für $B(y)$ ist, ist nach Konstruktion klar; daß sie vom Normaltypus ε der Ordnung $\varrho = \frac{\lambda}{\lambda - \mu}$ ist, folgt aus (****) (vgl. Anm. ⁵⁾). Schließlich folgt aus (***) und (****) in Verbindung mit (*), daß (**) für alle $k = 0, 1, 2, \dots$ gilt, woraus man sofort schließt, daß der Koeffizient von y^k in der r -ten Ableitung von B_ε größer ist als der entsprechende in der $(r+1)$ -ten Ableitung; hieraus folgt (43).

so sieht man wegen (43) durch Schluß von n auf $n+1$, daß

$$(45) \quad \frac{\partial^r Z_n}{\partial y^r} < \frac{\partial^s Z_n}{\partial y^s} \quad \left(\begin{array}{l} n=0, 1, 2, \dots \\ r=0, 1, 2, \dots \\ s > r, \quad y \geq 0 \end{array} \right).$$

Nunmehr behaupten wir

$$(46) \quad \frac{\partial^{\alpha+\tau} z_n}{\partial x^\alpha \partial y^\tau} < \frac{\partial^\tau Z_n}{\partial y^\tau} \quad \left(\begin{array}{l} \tau=0, 1, 2, \dots \\ n=0, 1, 2, \dots \\ \alpha=0, 1, 2, \dots, m' \end{array} \right).$$

Beweisen wir diese Behauptung zunächst für $n=0$. Es ist wegen $m-\alpha \geq \mu$ und $|x| \leq 1$

$$\frac{\partial^{\alpha+\tau} z_0}{\partial x^\alpha \partial y^\tau} = \int_0^x \frac{\partial^\tau b(t, y)}{\partial y^\tau} dt < \int_0^x K \frac{\partial^\tau B_\varepsilon(y)}{\partial y^\tau} dt \leq \int_0^x K \frac{\partial^\tau B_\varepsilon(y)}{\partial y^\tau} dt = \frac{\partial^\tau Z_0}{\partial y^\tau}.$$

(m-\alpha) \qquad (m-\alpha) \qquad (\mu)

Nehmen wir jetzt die Ungleichung (46) für $n-1$ als bewiesen an und beweisen sie für n . Es ist nach (38), (39) und Induktionsannahme

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{\alpha+\tau} z_n}{\partial x^\alpha \partial y^\tau} &= \int_0^x \sum_{p=0}^{m'} \sum_{q=0}^{\lambda} a_{pq} \frac{\partial^{p+q+\tau} z_{n-1}}{\partial x^p \partial y^{q+\tau}} dt < \int_0^x M(m'+1) \sum_{q=0}^{\lambda} \frac{\partial^{q+\tau} Z_{n-1}}{\partial y^{q+\tau}} dt \\ &\leq \int_0^x M(m'+1) \sum_{q=0}^{\lambda} \frac{\partial^{q+\tau} Z_{n-1}}{\partial y^{q+\tau}} dt. \end{aligned}$$

(m-\alpha) \qquad (m-\alpha) \qquad (\mu)

Nach (45) ist nun

$$\frac{\partial^{q+\tau} Z_{n-1}}{\partial y^{q+\tau}} \leq \frac{\partial^{\lambda+\tau} Z_{n-1}}{\partial y^{\lambda+\tau}} \quad (q=0, 1, \dots, \lambda);$$

also ist nach (40)

$$\frac{\partial^{\alpha+\tau} z_n}{\partial x^\alpha \partial y^\tau} < \int_0^x K \frac{\partial^{\lambda+\tau} Z_{n-1}}{\partial y^{\lambda+\tau}} dt = \frac{\partial^\tau Z_n}{\partial y^\tau}.$$

(\mu)

Hiermit ist (46) bewiesen.

Auf Grund von (46) übersieht man sofort: Um die Existenz einer Lösung von (3), (37) zu beweisen, die nebst ihren m' ersten Ableitungen nach x im ganzen Bereiche $0 \leq x \leq 1$, $-\infty < y < +\infty$ stetig in x , y und analytisch in y ist, genügt es, die Existenz einer Lösung von (41), (42) zu beweisen, welche die gleichen Eigenschaften besitzt und als Limes der Approximationen $Z_0 + Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$ erhalten werden kann. Kann man von letzterer überdies zeigen, daß sie von einem mit ε gegen 0 gehenden Normaltypus der Ordnung $\frac{\lambda}{\lambda-\mu}$ ist, so folgt, da ε beliebig ist, unmittelbar aus der Definition des Minimaltypus, daß die Lösung $z(x, y)$

$= z_0 + z_1 + z_2 + \dots$ von (3), (37) und ihre m' ersten Ableitungen nach x höchstens vom Minimaltypus der Ordnung $\frac{\lambda}{\lambda - \mu}$ sind. Daß $z(x, y)$ und die genannten Ableitungen dann auch eine von x unabhängige Majorante der gleichen Eigenschaft besitzen, folgt daraus, daß diese Funktionen auf Grund unserer Positivitätsannahme offenbar monoton in x sind. Es sind also jetzt lediglich die eben angeführten Behauptungen bezüglich der majoranten Gleichung (41) zu beweisen.

Durch die Substitution

$$\xi = K^{\frac{1}{\mu}} x; \quad Z(x, y) = \zeta(\xi, y) - \bar{B}_\varepsilon(y) \quad \text{mit} \quad \bar{B}_\varepsilon(y) = \int_0^x B_\varepsilon(\eta) d\eta$$

(λ)

wird nun (41), (42) übergeführt in

$$\frac{\partial^\mu \zeta}{\partial \xi^\mu} = \frac{\partial^\lambda \zeta}{\partial \xi^\lambda}; \quad \zeta(0, y) = \bar{B}_\varepsilon(y); \quad \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} = \dots = \left(\frac{\partial^{\mu-1} \zeta}{\partial \xi^{\mu-1}} \right)_{\xi=0} = 0.$$

Hieraus folgt nach Satz 3, daß

$$(47) \quad Z(x, y) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\partial^{p\lambda} \bar{B}_\varepsilon}{\partial y^{p\lambda}} \frac{\left(\frac{1}{K^\mu} x \right)^{p\mu}}{(p\mu)!} - \bar{B}_\varepsilon(y) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\partial^{p\lambda} B_\varepsilon}{\partial y^{p\lambda}} \frac{\left(\frac{1}{K^\mu} x \right)^{(p+1)\mu}}{[(p+1)\mu]!}$$

die analytische Lösung von (41), (42) darstellt (vgl. (9)) und bei genügend kleinem ε für alle x des Intervalles $0 \leq x \leq 1$ und alle y gewiß konvergent ist (vgl. Gl. (20), wo $\beta = \varepsilon$ zu setzen ist, da $\bar{B}_\varepsilon(y)$ vom Normaltypus ε der Ordnung $\frac{\lambda}{\lambda - \mu}$ ist), ferner daß Z von einem mit ε gegen 0 gehenden Normaltypus der Ordnung $\frac{\lambda}{\lambda - \mu}$ ist (vgl. Gl. (20) und (21)). Andererseits erkennt man nach (44) durch Schluß von p auf $p+1$, daß

$$Z_p = \frac{\partial^{p\lambda} B_\varepsilon}{\partial y^{p\lambda}} \frac{K^{p+1} x^{(p+1)\mu}}{[\mu(p+1)]!}$$

ist, so daß tatsächlich $Z(x, y) = \sum_{p=0}^{\infty} Z_p$ ist.

b) Beweis der Eindeutigkeit. Die Differenz v zweier den Bedingungen unseres Satzes genügender Lösungen erfüllt die Gleichung

$$(48) \quad v = \int_0^x \sum_{p=0}^{m'} \sum_{q=0}^{\lambda} a_{pq} \frac{\partial^{p+q} v}{\partial x^p \partial y^q} dt$$

(m)

und besitzt nebst ihren m' ersten Ableitungen nach x nach Voraussetzung in dem Streifen $0 \leq x \leq 1$ eine Majorante $C(y)$ vom Minimaltypus der Ordnung $\frac{\lambda}{\lambda - \mu}$. Konstruieren wir zu dieser wie auf S. 67, 68 eine den dort ausgesprochenen Forderungen, insbesondere der Ungleichung (43) ge-

nügende Majorante $C_\varepsilon(y)$ vom Normaltypus ε der Ordnung $\frac{\lambda}{\lambda-\mu}$, so konvergiert, wenn ε genügend klein ist, in dem genannten Streifen die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^{n\lambda} C_\varepsilon}{\partial y^{n\lambda}} \frac{\left(K^{\frac{1}{\mu}} x\right)^{\mu n}}{(\mu n)!} \quad (\text{vgl. die Reihe (47)}),$$

woraus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K^n x^{\mu n}}{(\mu n)!} \frac{\partial^{n\lambda} C_\varepsilon}{\partial y^{n\lambda}} = 0$$

folgt. Können wir daher zeigen, daß für jedes $n = 1, 2, 3, \dots$

$$(49) \quad |v| < \frac{K^n x^{\mu n}}{(\mu n)!} \frac{\partial^{n\lambda} C_\varepsilon}{\partial y^{n\lambda}} \quad \text{für } y \geq 0$$

ist, so muß die in y analytische Funktion v identisch Null sein, woraus sich die behauptete Eindeutigkeit ergibt. An Stelle von (49) wollen wir die allgemeinere Ungleichung

$$(50) \quad \left| \frac{\partial^{\alpha+\tau} v}{\partial x^\alpha \partial y^\tau} \right| < \frac{x^{\mu n} K^n}{(\mu n)!} \frac{\partial^{n\lambda+\tau} C_\varepsilon}{\partial y^{n\lambda+\tau}} \quad \left(\begin{array}{l} n = 1, 2, \dots \\ \tau = 0, 1, 2, \dots \\ \alpha = 0, 1, 2, \dots, m' \end{array} \right)$$

beweisen. Nach (48) ist nämlich

$$\left| \frac{\partial^{\alpha+\tau} v}{\partial x^\alpha \partial y^\tau} \right| \leq \int_0^x \sum_{p=0}^{m'} \sum_{q=0}^{\lambda} \left| a_{pq} \frac{\partial^{p+q+\tau} v}{\partial x^p \partial y^{q+\tau}} \right| dt < \int_0^x (m'+1) M \sum_{q=0}^{\lambda} \frac{\partial^{q+\tau} C_\varepsilon}{\partial y^{q+\tau}} dt;$$

(m-\alpha) \hspace{15em} (m-\alpha)

also ist nach (43), wegen $m - \alpha \geq \mu$ und $|x| \leq 1$,

$$\left| \frac{\partial^{\alpha+\tau} v}{\partial x^\alpha \partial y^\tau} \right| < \int_0^x K \frac{\partial^{\lambda+\tau} C_\varepsilon}{\partial y^{\lambda+\tau}} dt = \frac{x^\mu}{\mu!} K \frac{\partial^{\lambda+\tau} C_\varepsilon}{\partial y^{\lambda+\tau}}.$$

(\mu)

Hiermit ist (50) für $n = 1$ bewiesen. Nehmen wir (50) für $n - 1$ als bewiesen an und beweisen wir diese Ungleichung für n . Es ist auf Grund von (48) und nach der Induktionsannahme

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^{\alpha+\tau} v}{\partial x^\alpha \partial y^\tau} \right| &\leq \int_0^x \sum_{p=0}^{m'} \sum_{q=0}^{\lambda} \left| a_{pq} \frac{\partial^{p+q+\tau} v}{\partial x^p \partial y^{q+\tau}} \right| dt \\ &< \int_0^x (m'+1) M \frac{t^{\mu(n-1)} K^{n-1}}{[\mu(n-1)]!} \sum_{q=0}^{\lambda} \frac{\partial^{(n-1)\lambda+q+\tau} v}{\partial y^{(n-1)\lambda+q+\tau}} dt \\ &\leq K^n \frac{\partial^{n\lambda+\tau} C_\varepsilon}{\partial y^{n\lambda+\tau}} \int_0^x \frac{t^{\mu(n-1)}}{[\mu(n-1)]!} dt, \end{aligned}$$

(\mu)

woraus die Behauptung (50) folgt.

Der eben bewiesene Satz 7 ist nicht richtig, wenn die Koeffizienten α_{pq} der Gleichung (3) von y abhängen, im übrigen aber alle Voraussetzungen des Satzes erhalten bleiben: In der Tat besitzt das Problem

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}; \quad z(0, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{e^{\delta(k-1)k}} \quad (\delta > 0),$$

welches, wie leicht zu sehen, alle Voraussetzungen erfüllt, die analytische Lösung

$$z(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} y^k \frac{e^{(k-1)kx}}{e^{\delta(k-1)k}}.$$

Für $x > \delta$ ist $z(x, y)$ gewiß nicht singularitätenfrei.

(Eingegangen am 13. Mai 1927.)

Über die Abschnitte von Potenzreihen, die in einem Kreise beschränkt bleiben.

Von

W. Rogosinski und G. Szegő in Königsberg.

Das Verhalten der Abschnitte von Potenzreihen, die in einem gegebenen Kreise beschränkt bleiben, ist verschiedentlich¹⁾ einer eingehenden Untersuchung unterzogen worden. In der vorliegenden Arbeit werden die bisher erzielten Ergebnisse in mancher Hinsicht ergänzt. Geeignete „Abschnittskoppelungen“, wie sie der eine von uns²⁾ in der Summierungstheorie gewisser Reihentypen herangezogen hat, werden hierbei eine besondere Rolle spielen.

Wir betrachten, wie üblich, die Klasse $\mathfrak{U}$ der in $|z| < 1$ konvergenten Potenzreihen

$$(1) \quad f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots,$$

die daselbst der Beschränkung

$$(2) \quad |f(z)| \leq 1$$

genügen.

¹⁾ Vgl. den Enzyklopädieartikel von L. Bieberbach, Neuere Untersuchungen über Funktionen von komplexen Variablen [II C 4, S. 379–392], S. 500 ff. Darüber hinaus vgl. die Arbeit von I. Schur und G. Szegő, Über die Abschnitte einer im Einheitskreise beschränkten Potenzreihe [Sitzungsberichte der preußischen Akademie der Wissenschaften 1925, S. 545–560] und die dort S. 545 Fußnote ²⁾ zitierten Abhandlungen neueren Datums. Vgl. ferner O. Szász, Korlátos hatványsorok együtthatóiról [Math. és term. tud. ért. **43** (1926), S. 488–503]; Korlátos hatványsorokról [ebenda, S. 504–520].

²⁾ W. Rogosinski, Reihensummierung durch Abschnittskoppelungen [Math. Zeitschr. **25** (1926), S. 132–149].

Bekanntlich³⁾ sind die Abschnitte

$$(3) \quad s_n(z) = \sum_{\nu=0}^n c_\nu z^\nu \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

einer solchen Potenzreihe in ihrer Gesamtheit nicht notwendig für ein z , $|z| = 1$, beschränkt; insbesondere gilt dies für die Zahlen $s_n = s_n(1)$.

Es liegt daher nahe, allgemeiner für beliebige komplexe, evtl. von n abhängige Koeffizienten $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ bei festem n nach der oberen Grenze des absoluten Betrages von

$$(4) \quad L_n = \sum_{\nu=0}^n \lambda_\nu c_\nu$$

„innerhalb $\mathfrak{E}$ “, d. h. für alle unsere $f(z)$ zu fragen und insbesondere Folgen solcher L_n zu suchen, welche in ihrer Gesamtheit beschränkt bleiben. Derartige Bildungen, die überdies Rückschlüsse auf das Abschnittsverhalten gestatten, werden natürlich ein besonderes Interesse verdienen.

So gilt z. B. für die arithmetischen Mittel der s_n

$$(5) \quad \sigma_n = \sum_{\nu=0}^n \left(1 - \frac{\nu}{n+1}\right) c_\nu = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^n s_\nu = \frac{s_n}{n+1}$$

bekanntlich⁴⁾ stets

$$(6) \quad |\sigma_n| \leq 1,$$

so daß also die s_n wenigstens „im Mittel“ beschränkt bleiben.

Zur Abschätzung der L_n kennt man folgende Verfahren.

I. Man benutzt den Satz⁵⁾:

Es sei $\lambda_n \neq 0$ und (nach beliebiger Normierung der Wurzel)

$$(7) \quad \sqrt{\lambda_n + \lambda_{n-1}z + \dots + \lambda_0 z^n} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mu_\nu z^\nu$$

gesetzt. Dann ist

$$(8) \quad |L_n| \leq |\mu_0|^2 + |\mu_1|^2 + \dots + |\mu_n|^2.$$

³⁾ L. Fejér, Über gewisse Potenzreihen an der Konvergenzgrenze [Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften 1910, Nr. 3, 17 S.].

⁴⁾ L. Fejér, Über gewisse durch die Fouriersche und Laplacesche Reihe definierte Mittelkurven und Mittelflächen [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 38 (1914), S. 79–97].

⁵⁾ Siehe E. Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie [Julius Springer, Berlin 1916], §§ 1, 2, wo der Spezialfall $\lambda_\nu = 1$ behandelt wird. Der allgemeine Satz des Textes findet sich bei O. Szász, Ungleichungen für die Koeffizienten einer Potenzreihe [Math. Zeitschr. 1 (1918), S. 163–183], § 1, Satz I.

Ist insbesondere das Polynom

$$(9) \quad \mu(z) = \sum_{v=0}^n \mu_v z^v$$

in $|z| < 1$ von 0 verschieden, so stellt die rechte Seite von (8) das genaue Maximum von $|L_n|$ dar, welches für die zu $\mathfrak{E}$ gehörigen rationalen Funktionen

$$(10) \quad f_n(z) = \varepsilon \frac{z^n \bar{\mu}(z^{-1})}{\mu(z)}, \quad |\varepsilon| = 1$$

und nur für diese angenommen wird.

Mit dieser Methode hat zuerst Herr Landau⁶⁾ das Maximum der $|s_n|$ selbst ($\lambda_v = 1$) mit

$$(11) \quad G_n = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n}\right)^2 \sim \frac{1}{\pi} \log n$$

ermittelt. Auch (6) folgt hieraus ($\lambda_v = 1 - \frac{v}{n+1}$), mit dem Zusatz, daß die Gleichheit nur für $f(z) = \varepsilon$, $|\varepsilon| = 1$, eintreten kann.

II. ⁷⁾ Mittels zweimaliger partieller Summierung ergibt sich ($n \geq 2$)⁸⁾

$$(12) \quad \begin{aligned} L_n &= \sum_{v=0}^{n-1} s_v (\lambda_v - \lambda_{v+1}) + s_n \lambda_n \\ &= \sum_{v=0}^{n-2} S_v (\lambda_v - 2\lambda_{v+1} + \lambda_{v+2}) + S_{n-1} (\lambda_{n-1} - 2\lambda_n) + S_n \lambda_n \end{aligned}$$

und also wegen (6) die Abschätzung

$$(13) \quad |L_n| \leq \sum_{v=0}^{n-2} (v+1) |\lambda_v - 2\lambda_{v+1} + \lambda_{v+2}| + n |\lambda_{n-1} - 2\lambda_n| + (n+1) |\lambda_n|.$$

Diese Methode liefert, wenn die Bedingungen

$$(14) \quad \begin{aligned} \lambda_v - 2\lambda_{v+1} + \lambda_{v+2} &\geq 0 \quad (v = 0, 1, \dots, n-2); \\ \lambda_{n-1} - 2\lambda_n &\geq 0, \quad \lambda_n \geq 0 \end{aligned}$$

⁶⁾ Vgl. a. a. O. ⁵⁾.

⁷⁾ Vgl. L. Fejér, Über die Positivität von Summen, die nach trigonometrischen oder Legendreschen Funktionen fortschreiten (Erste Mitteilung) [Acta litterarum ac scientiarum regiae universitatis hungaricae Francisco-Josephinae, sectio scientiarum mathematicarum 2 (1925), S. 75–86], wo mit Hilfe der Beweismethode des Textes gezeigt wird, daß die Bedingungen (14) die Nichtnegativität des Kosinuspolynoms (16) nach sich ziehen. Hier wird statt (6)

$$1 + 2 \sum_{v=1}^n \left(1 - \frac{v}{n}\right) \cos v\varphi = \frac{1}{n} \left(\frac{\sin n \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \right)^2 \geq 0$$

benutzt.

⁸⁾ Die Fälle $n=0$ und $n=1$ können unmittelbar behandelt werden.

erfüllt sind,

$$(15) \quad |L_n| \leq \lambda_0,$$

wo das Gleichheitszeichen nur für $f(z) = \varepsilon$, $|\varepsilon| = 1$, erreicht wird; dabei ist der triviale Fall der durchweg verschwindenden λ_n ausgeschlossen.

Endlich kann man

III. für den Fall *reeller* λ_n (allgemeiner wie unter den Bedingungen (14)⁹⁾) auf (15) schließen, wenn das trigonometrische Polynom

$$(16) \quad T_n(\varphi) = \frac{\lambda_0}{2} + \lambda_1 \cos \varphi + \dots + \lambda_n \cos n\varphi$$

niemals negativ wird¹⁰⁾. Dies folgt unmittelbar aus

$$(17) \quad L_n = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) T_n(\varphi) d\varphi.$$

Alle drei Methoden werden im folgenden herangezogen werden.

* * *

Im § 1 stellen wir uns die Aufgabe, „Abschnittskoppelungen“ von der Form

$$(18) \quad s_n(z) = \alpha s_n\left(ze^{\frac{a}{n}}\right) + \beta s_n\left(ze^{\frac{b}{n}}\right) \quad (\alpha \neq 0, \beta \neq 0, a \neq b; n \geq 1),$$

wo α, β, a, b feste, reelle oder komplexe Konstanten sind, nach der Methode II abzuschätzen. Es ergibt sich als *notwendige und hinreichende* Bedingung dafür, daß $|s_n(z)|$ gleichmäßig für alle n und alle $|z| \leq 1$ innerhalb $\mathfrak{E}$ beschränkt bleibt, die Relation

$$(19) \quad \alpha e^a + \beta e^b = 0.$$

Die Tatsache, daß es überhaupt solche gleichmäßig beschränkte Koppelungen gibt, ist im Hinblick auf das Verhalten der $s_n(z)$ selbst recht überraschend.

Zwei Spezialfälle verdienen ein besonderes Interesse. In dem ersten ist $a = 0, b < 0$; wir behandeln diese „Radialkoppelungen“ im § 2. Hier hat man einfach für $|z| \leq 1$

$$(20) \quad \left| \alpha s_n(z) + \beta s_n\left(ze^{\frac{b}{n}}\right) \right| \leq |\alpha + \beta| \quad (b < 0, \alpha + \beta e^b = 0).$$

⁹⁾ Vgl. Fußnote 7).

¹⁰⁾ Das Gleichheitszeichen in (15) tritt auch hier dann und nur dann ein, wenn $f(z) = \varepsilon$, $|\varepsilon| = 1$, ist (vgl. die in Fußnote ¹⁾ zitierten Arbeiten von O. Szász). Dabei wird der triviale Fall $\lambda_0 = 0$ ausgeschlossen.

Dies ergibt insbesondere den folgenden Satz:

In $|z| \leq 1$ gilt

$$(21) \quad \left| \frac{s_n(\varrho z) - \varrho^n s_n(z)}{1 - \varrho^n} \right| \leq 1 \quad (0 \leq \varrho < 1; n = 1, 2, 3, \dots).$$

Das Gleichheitszeichen tritt nur für $f(z) = \varepsilon$, $|\varepsilon| = 1$, ein¹¹⁾.

Der Spezialfall der „Kreiskoppelungen“, wo a und b rein imaginär sind, wird im § 3 behandelt. Hier wird insbesondere nach der Methode I folgendes gezeigt:

Bezeichnet M_n die obere Grenze des absoluten Betrages der „symmetrischen Kreiskoppelungen“

$$(22) \quad s_n \left(z e^{\frac{i\pi}{2n}} \right) + s_n \left(z e^{-\frac{i\pi}{2n}} \right) \quad (n \geq 1)$$

für $|z| \leq 1$ innerhalb $\mathfrak{E}$, so ist

$$(23) \quad M_n = 2 \sin \frac{\pi}{2n} \sum_{\nu=0}^{n-1} P_{\nu}^2 \left(\cos \frac{\pi}{2n} \right),$$

wo $P_n(x)$ das n -te Legendresche Polynom bedeutet.

Es ist ersichtlich

$$(24) \quad M_n \leq 2n \sin \frac{\pi}{2n} < \pi. \quad 12)$$

Genauer ist sogar

$$(25) \quad M_n < \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_0^2(x) dx,$$

wo $J_0(x)$ die Besselsche Funktion 0-ter Ordnung bedeutet.

Es gilt also innerhalb $\mathfrak{E}$ für alle n und alle $|z| \leq 1$

$$(26) \quad \left| \frac{s_n \left(z e^{\frac{i\pi}{2n}} \right) + s_n \left(z e^{-\frac{i\pi}{2n}} \right)}{2} \right| < \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_0^2(x) dx = 1,0777 \dots$$

Die Konstante auf der rechten Seite kann durch keine kleinere ersetzt werden.

Der § 4 enthält Anwendungen der Ungleichung (21).

Es sei $|z_0| = 1$, $w_0 = s_n(z_0)$ und $\mathfrak{E}$ bezeichne die orientierte Bildkurve des Radius $0 z_0$ des Einheitskreises der z -Ebene bei der Abbildung $w = s_n(z)$. Der triviale Fall $f(z) = \varepsilon$, $|\varepsilon| = 1$, sei ausgeschlossen.

¹¹⁾ Für $\varrho \rightarrow 1$ folgt hieraus (6).

¹²⁾ Vgl. die in Fußnote ⁵⁾ zitierte Arbeit von O. Szász, § 5.

$\mathfrak{C}$ trifft den Einheitskreis der w -Ebene in höchstens einem Punkte.

Ist $|w_0| \leq 1$, so gilt also $|s_n(z)| < 1$ sonst auf dem ganzen Radius (Fig. 1)¹³⁾.

Ist dagegen $|w_0| > 1$, so wird $|w|$ längs der Kurve $\mathfrak{C}$ von der Stelle w^* an, wo sie $|w| = 1$ trifft, (unter Ausschluß der Gleichheit) wachsen, überdies so, daß jedes solche Kurvenstück w^*w ganz in dem Bereiche verläuft, der durch die Tangenten von w an den Einheitskreis $|w| = 1$ und dessen w^* enthaltenden Kreisbogen berandet ist (Fig. 2).

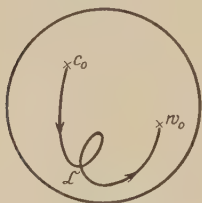


Fig. 1.

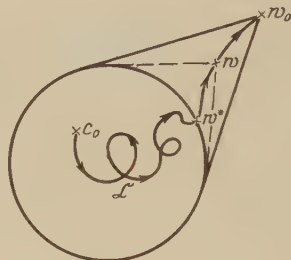


Fig. 2.

Eine andere Anwendung liegt in der Richtung einer gemeinsamen Untersuchung von I. Schur und G. Szegö¹⁴⁾.

Es sei $c \geq 0$ und $r_n(c)$ bezeichne den Radius des größten Kreises $|z| \leq r_n(c)$, in dem bei festem n innerhalb $\mathfrak{C}$

$$(27) \quad |s_n(z)| \leq 1 + c$$

gilt. In der erwähnten Arbeit ist u. a.

$$(28) \quad r_n(0) = 1 - \frac{\log n}{n} + O\left(\frac{\log \log n}{n}\right)$$

bewiesen worden. Wir schließen aus (21), daß für positive c sogar

$$(29) \quad r_n(c) = 1 - \frac{\log \log n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

ist.

Im § 5 beweisen wir weiter, daß innerhalb $\mathfrak{C}$ für alle n und alle $|z| \leq 1$

$$(30) \quad \left| \frac{1}{z} \int_0^z s_n(\zeta) d\zeta \right| = \left| \sum_{v=0}^n \frac{c_v z^v}{v+1} \right| \leq 1$$

gilt. Das Gleichheitszeichen wird nur im Falle $f(z) \equiv \varepsilon$, $|\varepsilon| = 1$, erreicht.

¹³⁾ Einer Bemerkung von L. Fejér zufolge besagt dieser Satz: Die Punkte z im abgeschlossenen Einheitskreise mit $|s_n(z)| \leq 1$ bilden einen in bezug auf den Nullpunkt sternförmigen Bereich.

¹⁴⁾ A. a. O. ¹⁾, S. 553.

(21) in Verbindung mit (11) würde leicht $1 + \frac{G_2 - 1}{3} = 1 + \frac{25}{192} = 1,1302 \dots$ rechts in (30) ergeben¹⁵⁾. $\frac{\pi}{16} = 1,2825 \dots$ wäre trivial (Anwendung der Schwarzschen Ungleichung).

(30) folgt daraus, daß wir (Methode III) zeigen können, daß die *trigonometrischen Polynome*

$$(31) \quad C_n(\varphi) = \frac{1}{2} + \frac{\cos \varphi}{2} + \frac{\cos 2\varphi}{3} + \dots + \frac{\cos n\varphi}{n+1}$$

nichtnegativ sind¹⁶⁾.

Der § 6 ist dem folgenden Satze gewidmet, dessen Grenzfall $\sigma \rightarrow 0$ (abgesehen von der genauen Konstantenbestimmung) mit (21) übereinstimmt.

Es sei $0 < \sigma < 1$ und $\mathfrak{G}_\sigma$ bedeute das Gebiet, das von den Tangentenstrecken von $z=1$ an den Kreis $|z|=\sigma$ bis zu den Berührungspunkten und von dem durch diese und $z=-\sigma$ bestimmten Bogen dieses Kreises berandet wird. Für komplexes α bezeichne ferner $\alpha \mathfrak{G}_\sigma$ das Bild von $\mathfrak{G}_\sigma$ bei der Abbildung $w = \alpha z$ (Fig. 3).

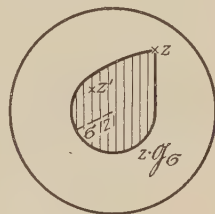


Fig. 3.

Es gibt dann eine nur von σ abhängige positive Konstante $H(\sigma)$, so daß gleichmäßig für alle $|z| \leq 1$, z' aus $z \mathfrak{G}_\sigma$ und alle $n = 1, 2, 3, \dots$, innerhalb $\mathfrak{E}$

$$(32) \quad \left| \frac{z'^n s_n(z) - z^n s_n(z')}{z'^n - z^n} \right| \leq H(\sigma)$$

gilt.

Endlich betrachten wir in einem Anhange (§ 7 und § 8) ebene und räumliche harmonische Entwicklungen, die im offenen Einheitskreise bzw. in der offenen Einheitskugel regulär und positiv sind. Wir leiten für die Abschnitte derselben einige ähnliche Sätze wie für die Potenzreihen der Klasse $\mathfrak{E}$ her. In ihnen sind selbstverständlich analoge Aussagen bezüglich der in $|z| < 1$ konvergenten Potenzreihen mit positivem Realteil enthalten.

¹⁵⁾ Die Folge $\frac{G_n - 1}{n+1}$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) ist monoton abnehmend.

¹⁶⁾ Aus diesem vielleicht an sich nicht uninteressanten Satze schließt man leicht das bekannte Ergebnis des Herrn W. H. Young [Proceedings of the London Mathematical Society (2) 11 (1913), S. 359], daß die trigonometrischen Polynome

$$1 + \frac{\cos \varphi}{1} + \frac{\cos 2\varphi}{2} + \dots + \frac{\cos n\varphi}{n}$$

nichtnegativ sind. Vgl. § 5, Zusatz.

§ 1.

Die allgemeine Abschnittskoppelung.

1. Es seien α, β, a und b beliebige feste komplexe Konstanten, die der Gleichung

$$(19) \quad \alpha e^a + \beta e^b = 0$$

genügen.

Um die Beschränktheit der Koppelungen (18) gleichmäßig für alle n und alle $|z| \leq 1$ innerhalb $\mathfrak{E}$ zu erweisen, darf man $z = 1$ setzen. Es handelt sich dann um die Zahlen

$$(33) \quad \kappa_n = \sum_{\nu=0}^n \left(\alpha e^{\frac{a\nu}{n}} + \beta e^{\frac{b\nu}{n}} \right) c_\nu,$$

die wir nach Methode II behandeln.

A_1, A_2, A_3 mögen nur von α, β, a und b abhängige positive Konstanten bezeichnen. Es ist hier für $\nu \leq n-2$ ($n \geq 2$)

$$(34) \quad |\lambda_\nu - 2\lambda_{\nu+1} + \lambda_{\nu+2}| = \left| \alpha e^{\frac{a\nu}{n}} \left(1 - e^{\frac{a}{n}} \right)^2 + \beta e^{\frac{b\nu}{n}} \left(1 - e^{\frac{b}{n}} \right)^2 \right| < \frac{A_1}{n^2},$$

$$|\lambda_{n-1}| = \left| \alpha e^a \left(e^{-\frac{a}{n}} - 1 \right) + \beta e^b \left(e^{-\frac{b}{n}} - 1 \right) \right| < \frac{A_2}{n}; \quad \lambda_n = 0,$$

so daß (13)

$$(35) \quad |\kappa_n| < \frac{A_1}{n^2} \sum_{\nu=0}^{n-2} (\nu+1) + A_2 < A_3$$

ergibt.

2. Sollen umgekehrt die κ_n gleichmäßig innerhalb $\mathfrak{E}$ beschränkt bleiben, so muß (19) erfüllt sein.

Denn die Summe rechts in (12) bleibt, wie eben gezeigt, jedenfalls beschränkt, ähnlich auch $S_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)$. Es muß dann also

$$(S_n - S_{n-1})\lambda_n = s_n(\alpha e^a + \beta e^b)$$

gleichmäßig innerhalb $\mathfrak{E}$ beschränkt bleiben, was (19) zur Folge hat.

3. Allgemeiner gilt: Sind $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$ und $a_1, a_2, \dots, a_l$ beliebige feste komplexe Konstanten, so bleiben die Koppelungen

$$(36) \quad \alpha_1 s_n \left(z e^{\frac{a_1}{n}} \right) + \alpha_2 s_n \left(z e^{\frac{a_2}{n}} \right) + \dots + \alpha_l s_n \left(z e^{\frac{a_l}{n}} \right)$$

dann und nur dann für alle n und alle $|z| \leq 1$ gleichmäßig innerhalb $\mathfrak{E}$ beschränkt, wenn die Gleichung

$$(37) \quad \alpha_1 e^{a_1} + \alpha_2 e^{a_2} + \dots + \alpha_l e^{a_l} = 0$$

erfüllt ist

§ 2.

Radialkoppelungen.

Es sei nun $a = 0$, $b < 0$ vorausgesetzt. Mit $\alpha = -1$ und $\beta = e^{-b}$ ist (19) erfüllt. Für $n = 1$ ist die zu beweisende Ungleichung (20) trivial; es sei also $n \geq 2$. Ferner sei $z = 1$ gesetzt. Dann gelten wegen

$$(38) \quad \begin{aligned} \lambda_\nu - 2\lambda_{\nu+1} + \lambda_{\nu+2} &= e^{-b+\frac{b\nu}{n}} \left(1 - e^{\frac{b}{n}}\right)^2 > 0 \quad (\nu \leq n-2), \\ \lambda_{n-1} &= e^{-\frac{b}{n}} - 1 > 0, \quad \lambda_n = 0 \end{aligned}$$

die Ungleichungen (14). Damit ist nach (15), wegen $\lambda_0 = \alpha + \beta$, die Behauptung (20) bewiesen. Das Gleichheitszeichen gilt nur für $f(z) = \varepsilon$, $|\varepsilon| = 1$.

Die Ungleichung (21) ergibt sich unmittelbar, wenn man $e^{\frac{b}{n}} = \varrho$ setzt.

Zugleich folgt (vgl. Fußnote 7), daß die trigonometrischen Polynome

$$(39) \quad 1 + 2 \sum_{\nu=1}^n \frac{\varrho^\nu - \varrho^n}{1 - \varrho^n} \cos \nu \varphi \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

für $0 \leq \varrho < 1$ nichtnegativ sind. (Sie sind sogar, wie man aus der (12) entsprechenden Umformung leicht ersieht, stets positiv.) Für $\varrho \rightarrow 1$ geht (39) über in

$$1 + 2 \sum_{\nu=1}^n \left(1 - \frac{\nu}{n}\right) \cos \nu \varphi = \frac{1}{n} \left(\frac{\sin n \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \right)^2.$$

Einen zweiten Beweis für die Positivität der trigonometrischen Polynome (39) findet der Leser im § 7.

§ 3.

Kreiskoppelungen.

1. Mit $\vartheta > 0$, $\alpha = e^{i\vartheta}$, $\beta = -e^{-i\vartheta}$, $a = -i\vartheta$, $b = i\vartheta$ erhält man die „Kreiskoppelungen“

$$(40) \quad \kappa_n(z; \vartheta) = e^{i\vartheta} s_n \left(z e^{-\frac{i\vartheta}{n}} \right) - e^{-i\vartheta} s_n \left(z e^{\frac{i\vartheta}{n}} \right),$$

für die (19) erfüllt ist.

Wir nennen $M_n(\vartheta)$ die obere Grenze von $|\kappa_n(1; \vartheta)|$ (vgl. die in der Fußnote 5) zitierte Arbeit von O. Szász) bei festem n und ϑ innerhalb $\mathfrak{E}$; die Zahlen $M_n(\vartheta)$ bleiben bei variablem n (aber festem ϑ) gleichmäßig beschränkt. Die Methode I der Einleitung gestattet für gewisse ϑ ihre Bestimmung.

Es handelt sich demnach um die Abschätzung von

$$(41) \quad \kappa_n(1; \vartheta) = 2i \sum_{\nu=0}^{n-1} \sin \frac{(n-\nu)\vartheta}{n} c_\nu \quad (n \geq 1).$$

Man findet, wegen

$$(42) \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \sin \frac{\nu\vartheta}{n} z^{\nu-1} = \frac{\sin \frac{\vartheta}{n}}{1 - 2z \cos \frac{\vartheta}{n} + z^2},$$

$$\sqrt{\frac{1}{1 - 2z \cos \frac{\vartheta}{n} + z^2}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu \left(\cos \frac{\vartheta}{n} \right) z^\nu,$$

nach (8)

$$(43) \quad M_n(\vartheta) \leq 2 \left| \sin \frac{\vartheta}{n} \right| \sum_{\nu=0}^{n-1} P_\nu^2 \left(\cos \frac{\vartheta}{n} \right). \quad (17)$$

Hier wird das Gleichheitszeichen gelten, wenn das Polynom

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} P_\nu \left(\cos \frac{\vartheta}{n} \right) z^\nu$$

in $|z| < 1$ nicht verschwindet, und zwar nur für die Funktionen

$$(44) \quad f_n(z) = \varepsilon \frac{\sum_{\nu=0}^{n-1} P_{n-1-\nu} \left(\cos \frac{\vartheta}{n} \right) z^\nu}{\sum_{\nu=0}^{n-1} P_\nu \left(\cos \frac{\vartheta}{n} \right) z^\nu}, \quad |\varepsilon| = 1.$$

Nach einem bekannten Kakeyaschen Satze¹⁸⁾ genügt es hierzu,

$$(45) \quad P_0 \left(\cos \frac{\vartheta}{n} \right) > P_1 \left(\cos \frac{\vartheta}{n} \right) > \dots > P_{n-1} \left(\cos \frac{\vartheta}{n} \right) > 0$$

zu zeigen. (Die Nullstellen liegen dann sogar in $|z| > 1$.) Dies ist für $n \geq 2$ sicher der Fall, wenn $\cos \frac{\vartheta}{n} > x_{n-1}$ bleibt, wo x_{n-1} die größte Nullstelle von $P_{n-1}(x)$ bezeichnet. Nun gilt nach einem Satze von A. Markoff¹⁹⁾

$$(46) \quad \cos \frac{\pi}{n} \leq x_{n-1} \leq \cos \frac{\pi}{2(n-1)},$$

so daß für $\cos \frac{\vartheta}{n} > \cos \frac{\pi}{2(n-1)}$ die Ungleichungen (45) erfüllt sind.

¹⁷⁾ Siehe O. Szász, a. a. O. ⁶⁾, S. 175.

¹⁸⁾ Vgl. E. Landau, a. a. O. ⁶⁾, S. 20.

¹⁹⁾ A. Markoff, Sur les racines de certaines équations (seconde note) [Mathematische Annalen 27 (1886), S. 177–182]. — Einen anderen Beweis gab T. J. Stieltjes, Sur les racines de l'équation $X_n = 0$ [Acta Mathematica 9 (1887), S. 385–400].

Damit ist für $0 < \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$ die (23) enthaltende Formel

$$(47) \quad M_n(\vartheta) = 2 \sin \frac{\vartheta}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} P_{\nu}^2 \left(\cos \frac{\vartheta}{n} \right) \quad (n \geq 1)$$

bewiesen²⁰⁾.

2. Wir beweisen statt (25) bzw. (26) gleich die entsprechende allgemeinere Ungleichung für $M_n(\vartheta)$. Wir zeigen, immer $0 < \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$ vorausgesetzt,

a) die Existenz des Grenzwertes

$$(25') \quad \lim_{n \rightarrow \infty} M_n(\vartheta) = M(\vartheta) = 2 \int_0^{\vartheta} J_0^2(x) dx,$$

b) die Ungleichung

$$(25'') \quad M_n(\vartheta) < M(\vartheta).$$

a) (25') folgt fast unmittelbar aus der bekannten²¹⁾, für $0 \leq \vartheta \leq \vartheta_0$ (ϑ_0 fest) gleichmäßig geltenden Beziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n \left(\cos \frac{\vartheta}{n} \right) = J_0(\vartheta).$$

Sei nämlich $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Für $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$ und $n \geq N$. $N(\varepsilon)$ ist dann

$$\left| P_n^2 \left(\cos \frac{\vartheta}{n} \right) - J_0^2(\vartheta) \right| < \varepsilon,$$

also wegen

$$|P_n(x)| \leq 1 \quad (-1 \leq x \leq 1); \quad |J_0(\vartheta)| \leq 1 \quad (\vartheta \text{ reell}),$$

für $n > N$

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} P_{\nu}^2 \left(\cos \frac{1}{\nu} \frac{\nu \vartheta}{n} \right) - \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} J_0^2 \left(\frac{\nu \vartheta}{n} \right) \right| < \frac{2N}{n} + \varepsilon. \quad (22)$$

Daraus und aus (47) folgt ersichtlich die Behauptung.

b) Für die ebenfalls zu $\mathfrak{E}$ gehörige Potenzreihe $f^*(z) = f(z^2)$ ist in leicht verständlicher Bezeichnung $s_{2n}^*(z) = s_n(z^2)$,

²⁰⁾ Herr L. Fejér macht uns darauf aufmerksam, daß man hier die Anwendung der A. Markoffischen Abschätzungen vermeiden kann; aus der bekannten Mehlerschen Darstellung der Legendreschen Polynome folgt nämlich unmittelbar die Gültigkeit von

(45) für $\vartheta \leq \frac{\pi}{2} \frac{n}{n-\frac{1}{2}}$, woraus (47) hervorgeht.

²¹⁾ Vgl. etwa F. G. Mehler, Über die Verteilung der statischen Elektrizität in einem von zwei Kugelkalotten begrenzten Körper [Journal für Math. 68 (1868), S. 134–150], S. 140.

²²⁾ Für $\nu = 0$ ist $\frac{1}{\nu} \frac{\nu \vartheta}{n} = \frac{\vartheta}{n}$ zu setzen.

$$(48) \quad e^{i\vartheta} s_{2n}^* \left(z e^{-\frac{i\vartheta}{2n}} \right) - e^{-i\vartheta} s_{2n}^* \left(z e^{\frac{i\vartheta}{2n}} \right) = e^{i\vartheta} s_n \left(z^2 e^{-\frac{i\vartheta}{n}} \right) - e^{-i\vartheta} s_n \left(z^2 e^{\frac{i\vartheta}{n}} \right),$$

woraus $M_n(\vartheta) \leq M_{2n}(\vartheta)$ hervorgeht. Es gilt sogar genauer $M_n(\vartheta) < M_{2n}(\vartheta)$; sonst müßten nämlich die beiden, durch (44) definierten rationalen Funktionen $f_n(z^2)$ und $f_{2n}(z)$ bis auf einen konstanten Faktor vom Betrage 1 übereinstimmen, was nach der oben festgestellten Lage der Nullstellen der Nenner unmöglich ist.

Mit Rücksicht auf die Existenz von $M(\vartheta)$ ist damit die Ungleichung (25'') bewiesen.

§ 4.

Anwendungen des Satzes über die Radialkoppelungen.

1. Um die in der Einleitung genannten Eigenschaften der Bildkurve $\mathcal{C}$ eines Radius $0 < z_0$ des Einheitskreises bei der Abbildung $w = s_n(z)$ herzu-
leiten, darf ersichtlich $z_0 = 1$ angenommen werden.

Wir können dann (21) in der Form

$$(21') \quad s_n(\varrho) = \varrho^n s_n(1) + (1 - \varrho^n) \theta$$

schreiben, wobei $|\theta| < 1$ ist, wenn wir den Fall $f(z) = \varepsilon$, $|\varepsilon| = 1$, ausschließen; es ist also (für $s_n(1) \neq \theta$) $s_n(\varrho)$ ein innerer Punkt der Strecke, die $s_n(1) = w_0$ und einen gewissen Punkt aus $|w| < 1$ verbindet. Wendet man diese Überlegung für $0 < \varrho' \leq 1$ noch auf die Funktion $f(\varrho' z)$ an, so ist alles bewiesen.

2. Zum Beweise von (29) schließt man aus (21') mit der Bezeichnung von (11) für $c > 0$

$$|s_n(\varrho)| \leq \varrho^n G_n + 1 - \varrho^n = 1 + \varrho^n (G_n - 1) \leq 1 + c,$$

wenn nur $\varrho^n (G_n - 1) \leq c$ ist. Man hat also zunächst

$$(49) \quad r_n(c) \geq \left(\frac{c}{G_n - 1} \right)^{\frac{1}{n}} = \exp \left\{ \frac{\log c}{n} - \frac{\log (G_n - 1)}{n} \right\} = 1 - \frac{\log \log n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Um auch eine obere Abschätzung für $r_n(c)$ zu erhalten, benutzen wir (in leicht modifizierter Form) die von Herrn Fejér betrachteten Polynome²³⁾

²³⁾ L. Fejér, Über Potenzreihen, deren Summe im abgeschlossenen Konvergenz-
kreise überall stetig ist [Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse der Kgl. Bayerischen
Akademie der Wissenschaften 1917, S. 33—50]. Herrn Fejérs Polynome sind

$$z^n - \frac{z^2}{n-1} + \dots + \frac{z^n}{1} - \frac{z^{n+1}}{1} - \dots - \frac{z^{2n}}{n},$$

deren Diskussion auf $\sum_{\nu=1}^n \frac{\sin\left(\nu - \frac{1}{2}\right) \varphi}{\nu}$ führt.

$$(50) \quad F_n(z) = \frac{z}{n} + \frac{z^2}{n-1} + \dots + \frac{z^n}{1} - \frac{z^{n+2}}{1} - \frac{z^{n+3}}{2} - \dots - \frac{z^{2n+1}}{n} \\ = z^{n+1} \sum_{\nu=1}^n \frac{z^{-\nu} - z^{\nu}}{\nu}.$$

Für $z = e^{i\varphi}$, φ reell, ist

$$(51) \quad |F_n(z)| = 2 \left| \sum_{\nu=1}^n \frac{\sin \nu \varphi}{\nu} \right| < A,$$

wo A eine absolute Konstante bedeutet²⁴⁾. Die Potenzreihe $A^{-1} F_n(z)$ gehört daher zu $\mathfrak{E}$. Für sie ist ($\varrho < 1$)

$$(52) \quad s_n(\varrho) = A^{-1} \left(\frac{\varrho}{n} + \frac{\varrho^2}{n-1} + \dots + \frac{\varrho^n}{1} \right) > A^{-1} \varrho^n \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{1} \right) \\ > A^{-1} \varrho^n \log n.$$

Wir setzen nun, mit festem γ , für $n \geq 2$

$$(53) \quad \varrho = 1 - \frac{\log \log n}{n} + \frac{\gamma}{n};$$

dann ist

$$\varrho^n \log n = \exp \{ n \log \varrho + \log \log n \} \\ = \exp \left\{ n \left[-\frac{\log \log n}{n} + \frac{\gamma}{n} + O \left(\frac{(\log \log n)^2}{n} \right) \right] + \log \log n \right\} \\ = \exp \{ \gamma + o(1) \} \sim e^{\gamma}.$$

Wählt man in (53) nunmehr $\gamma > \log [A(1+c)]$, so wird nach (52) für genügend große n unser $s_n(\varrho) > 1+c$. Es ist also $r_n(c) < \varrho$ und die Behauptung ist bewiesen.

§ 5.

Abschätzung der Abschnittsintegrale.

Unser Satz (30) beruht auf der Behauptung, daß die trigonometrischen Polynome

$$(31) \quad C_n(\varphi) = \frac{1}{2} + \frac{\cos \varphi}{2} + \frac{\cos 2\varphi}{3} + \dots + \frac{\cos n\varphi}{n+1}$$

nichtnegativ sind. Dies soll nun bewiesen werden.

²⁴⁾ Der kleinste für A zulässige Wert ist bekanntlich $A = 2 \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx = 3,4227 \dots$

Vgl. D. Jackson, Über eine trigonometrische Summe [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 32 (1911), S. 257–262].

Es ist zunächst

$$C_0(\varphi) = \frac{1}{2}; \quad C_1(\varphi) = \frac{1}{2} + \frac{\cos \varphi}{2} \geq 0;$$

$$C_2(\varphi) = \frac{1}{2} + \frac{\cos \varphi}{2} + \frac{\cos 2\varphi}{3} = \frac{2}{3} \left(\cos \varphi + \frac{3}{8} \right)^2 + \frac{7}{96} \geq \frac{7}{96}.$$

Es sei also alsbald $n \geq 3$ vorausgesetzt, auch darf man $0 < \varphi \leq \pi$ annehmen.

Aus den bekannten Formeln

$$(54) \quad \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^n \cos \nu \varphi = \frac{\sin(2n+1)\frac{\varphi}{2}}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}, \quad \sum_{\nu=0}^n \frac{\sin(2\nu+1)\frac{\varphi}{2}}{2 \sin \frac{\varphi}{2}} = \frac{\sin^2(n+1)\frac{\varphi}{2}}{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

folgt durch zweimalige partielle Summierung

$$(55) \quad 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} C_n(\varphi) = \sum_{\nu=0}^{n-2} \frac{2 \sin^2(\nu+1)\frac{\varphi}{2}}{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)} + \frac{\sin^2 n \frac{\varphi}{2}}{n(n+1)} \\ + \frac{\sin^2(n+1)\frac{\varphi}{2} - \sin^2 n \frac{\varphi}{2}}{n+1}.$$

Wegen

$$(56) \quad \sin^2(n+1)\frac{\varphi}{2} - \sin^2 n \frac{\varphi}{2} = \sin(2n+1)\frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2}$$

ist sicher $C_n(\varphi) \geq 0$, wenn $(2n+1)\frac{\varphi}{2} \leq \pi$, d. h. wenn die Bedingung

$$(P) \quad n+1 \leq \frac{\pi}{\varphi} + \frac{1}{2} = \frac{2\pi+\varphi}{2\varphi} = P$$

erfüllt ist.

Andererseits ist nach (55) und (56)

$$2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} C_n(\varphi) \geq \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{3} + \frac{\sin^2 \varphi}{12} - \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{n+1},$$

so daß auch dann $C_n(\varphi) \geq 0$ gilt, wenn die Bedingung

$$(Q) \quad n+1 \geq \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{3} + \frac{\sin^2 \varphi}{12}} = \frac{6}{\sin \frac{\varphi}{2} (3 + \cos \varphi)} = Q$$

erfüllt ist.

Es sei zunächst $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{3}$; wir behaupten, daß dann $P \geq Q$ gilt, so daß mindestens eine der obigen Bedingungen erfüllt ist. Wir behaupten also für diese φ

$$\sin \frac{\varphi}{2} (3 + \cos \varphi) \geq \frac{12\varphi}{2\pi + \varphi}.$$

Die Funktion $\frac{\sin x}{x}$ nimmt im Intervall $0 < x \leq \frac{\pi}{6}$ monoton ab. Es ist

$$\text{also } \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}} \geq \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{6}} = \frac{3}{\pi}, \text{ so da\ss es gen\ugt}$$

$$(2\pi + \varphi)(3 + \cos \varphi) \geq 8\pi$$

zu beweisen; wegen $\cos \varphi \geq 1 - \frac{\varphi^2}{2}$ ist dies eine Folge von

$$(2\pi + \varphi)\left(4 - \frac{\varphi^2}{2}\right) \geq 8\pi, \text{ d. h. } \frac{\varphi^2}{2} + \pi\varphi \leq 4.$$

Und in der Tat ist f\ur unsere φ

$$\frac{\varphi^2}{2} + \pi\varphi \leq \frac{\pi^2}{18} + \frac{\pi^2}{3} = \frac{7\pi^2}{18} < \frac{70}{18} < 4.$$

Es sei nunmehr $\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \pi$ vorausgesetzt, so da\ss $\xi = \sin \frac{\varphi}{2}$ im Intervall $\frac{1}{2} \leq \xi \leq 1$ liegt. Hier ist aber

$$g(\xi) = \sin \frac{\varphi}{2} (3 + \cos \varphi) = 2\xi(2 - \xi^2)$$

wegen $g''(\xi) = -12\xi < 0$ eine von oben konvexe Funktion von ξ , so da\ss

$$g(\xi) \geq \text{Min} \left[g\left(\frac{1}{2}\right), g(1) \right] = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{4}$$

gilt.

Daher wird f\ur $\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \pi$

$$Q \leq \frac{24}{7} < 4,$$

und die Bedingung (Q) ist f\ur $n \geq 3$ erf\ult.

Damit ist die Absch\atzung (30) der Abschnittsintegrale vollst\andig bewiesen. Da\ss die Konstante 1 in letzterer durch keine kleinere ersetzt werden kann, ist selbstverst\andlich.

Zusatz. Ein Kosinuspolynom

$$(57) \quad T_n(\varphi) = \frac{\lambda_0}{2} + \frac{\lambda_1 \cos \varphi}{2} + \frac{\lambda_2 \cos 2\varphi}{3} + \dots + \frac{\lambda_n \cos n\varphi}{n+1}$$

mit nicht zunehmenden nichtnegativen Koeffizienten λ_ν ist nichtnegativ.

In der Tat gilt

$$T_n(\varphi) = \sum_{\nu=0}^{n-1} C_\nu(\varphi)(\lambda_\nu - \lambda_{\nu+1}) + C_n(\varphi)\lambda_n \geq 0.$$

Für $-1 < \alpha \leq 1$ fällt z. B. das Kosinuspolynom

$$(58) \quad C_n^{(\alpha)}(\varphi) = \frac{1}{1+\alpha} + \frac{\cos \varphi}{1+\alpha} + \frac{\cos 2\varphi}{2+\alpha} + \dots + \frac{\cos n\varphi}{n+\alpha}$$

unter diese Bemerkung; $C_n^{(0)}(\varphi)$ ist das in der Fußnote ¹⁶⁾ erwähnte W. H. Youngsche Polynom ²⁵⁾.

§ 6.

Ein weiterer Koppelungssatz.

Zum Beweise von (32) darf man ersichtlich $z = 1$ voraussetzen, ferner

$$(59) \quad z' = e^{\zeta}$$

mit

$$(60) \quad \frac{\pi}{2} + \delta \leq \arg \zeta \leq \frac{3\pi}{2} - \delta \quad (\delta > 0, \text{ fest})$$

wählen. Das Bild dieses Winkelraumes bei der Abbildung (59) wird nämlich für genügend kleines $\delta = \delta(\sigma)$ unser Gebiet $\mathfrak{G}_\sigma$ enthalten. Die Behauptung lautet also

$$(32') \quad \left| \frac{s_n(1) - e^{-n\zeta} s_n(e^{\zeta})}{1 - e^{-n\zeta}} \right| \leq K(\delta)$$

oder, da ζ und $n\zeta$ gleichzeitig unter (60) fallen,

$$(32'') \quad \left| \frac{s_n(1) - e^{-\zeta} s_n\left(e^{\frac{\zeta}{n}}\right)}{1 - e^{-\zeta}} \right| \leq K(\delta),$$

wo $K(\delta)$ (ebenso wie später $K_1(\delta)$ und $K_2(\delta)$) eine nur von δ abhängige Konstante bedeutet.

Man hat daher nur in (33) aus § 1

$$a = 0, \quad b = \zeta, \quad \alpha = \frac{1}{1 - e^{-\zeta}}, \quad \beta = -\frac{e^{-\zeta}}{1 - e^{-\zeta}}$$

zu setzen und die Abschätzung (35) für κ_n genauer in ihrer Abhängigkeit von ζ aus (60) zu verfolgen. Es sei hierbei $n \geq 2$. ²⁶⁾

Man findet zunächst

$$|\kappa_n| \leq \frac{|1 - e^{\frac{\zeta}{n}}|^3}{|1 - e^{\zeta}|} \sum_{\nu=0}^{n-2} (\nu + 1) e^{\Re \zeta \frac{\nu}{n}} + n \left| \frac{1 - e^{-\frac{\zeta}{n}}}{1 - e^{-\zeta}} \right|.$$

²⁵⁾ Ähnlich erkennt man die Existenz einer Zahl A , so daß die Polynome $C_n^{(\alpha)}(\varphi)$ für $-1 < \alpha \leq A$ nichtnegativ sind, während dies für $\alpha > A$ nicht der Fall ist. Es ist jedenfalls nach dem obigen $A \geq 1$, andererseits $A \leq 2(1 + \sqrt{2})$, wie eine leichte Diskussion von $C_2^{(\alpha)}(\varphi)$ zeigt.

²⁶⁾ Für $n = 1$ ist die Behauptung trivial.

Hier ist wegen

$$\frac{1}{1-q^n} \sum_{\nu=0}^{n-2} (\nu+1) q^\nu = \sum_{\nu=0}^{n-2} (\nu+1) q^\nu + \sum_{\nu=n}^{2n-2} (\nu+1-n) q^\nu + \dots$$

$$< \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1) q^\nu = \frac{1}{(1-q)^2} \quad (0 < q < 1)$$

das erste Glied rechts kleiner als

$$\left| \frac{1 - e^{\frac{\zeta}{n}}}{1 - e^{\Re \frac{\zeta}{n}}} \right|^2 \sum_{\nu=0}^{n-2} (\nu+1) e^{\Re \frac{\zeta}{n} \nu} < \left| \frac{1 - e^{\frac{\zeta}{n}}}{1 - e^{\Re \frac{\zeta}{n}}} \right|^2 < K_1(\delta)$$

und

$$n \left| \frac{1 - e^{-\frac{\zeta}{n}}}{1 - e^{-\zeta}} \right| = \left| \frac{e^{\frac{\zeta}{n}} - 1}{\frac{\zeta}{n}} \right| \left| \frac{\zeta e^{\zeta(1-\frac{1}{n})}}{e^{\zeta} - 1} \right| \leq \left| \frac{e^{\frac{\zeta}{n}} - 1}{\frac{\zeta}{n}} \right| \left| \frac{\zeta e^{\frac{\zeta}{2}}}{e^{\zeta} - 1} \right| < K_2(\delta),$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Anhang.

§ 7.

Ebene harmonische Entwicklungen.

1. Wir betrachten die Klasse $\mathfrak{H}$ der im Einheitskreise $r < 1$ konvergenten harmonischen Entwicklungen

$$(61) \quad u(r, \varphi) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n k_n(\varphi),$$

die daselbst positiv sind.

Die Abschnitte

$$(62) \quad v_n(r, \varphi) = 1 + \sum_{\nu=1}^n r^\nu k_\nu(\varphi) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

einer solchen Entwicklung bleiben bekanntlich in ihrer Gesamtheit für $r \leq 1$ nicht notwendig nach unten beschränkt. Es gilt genauer, wenn m_n das Minimum des n -ten Abschnittes $v_n(r, \varphi)$ der speziellen, zu $\mathfrak{H}$ gehörigen Entwicklung

$$(63) \quad 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\varphi$$

für $r \leq 1$ bedeutet,

$$(64) \quad v_n(r, \varphi) \geq m_n \sim 2n \cos x_0,$$

wo x_0 die in $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ gelegene Lösung der Gleichung $\operatorname{tg} x = x$ ist²⁷⁾.

²⁷⁾ I. Schur, Über die Koeffizientensummen einer Potenzreihe mit positivem reellen Teil [Archiv der Mathematik und Physik (3) 27 (1918), S. 126–135], S. 128.

Dagegen bleiben die arithmetischen Mittel der $v_n(r, \varphi)$ im Einheitskreise stets nichtnegativ²⁸⁾, d. h.

$$(65) \quad 1 + \sum_{\nu=1}^n \left(1 - \frac{\nu}{n+1}\right) r^\nu k_\nu(\varphi) \geq 0 \quad (r \leq 1).$$

2. Eine lineare Kombination

$$(66) \quad L_n(r, \varphi) = \lambda_0 + \sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu r^\nu k_\nu(\varphi)$$

der Glieder von (61) ist bekanntlich für $r \leq 1$ „innerhalb“ $\S$, d. h. für alle Entwicklungen aus $\S$ nichtnegativ, wenn es das trigonometrische Polynom (16) ist²⁹⁾. Daher gestattet uns der im § 2 erwähnte Satz über das trigonometrische Polynom (39), als Analogon von (21) die Ungleichung

$$(67) \quad v_n(\varrho r, \varphi) - \varrho^n v_n(r, \varphi) \geq 0 \quad (0 \leq r, \varrho \leq 1; n = 1, 2, 3, \dots)$$

auszusprechen. Umgekehrt folgt hieraus, indem man für $u(r, \varphi)$ die spezielle Funktion (63) wählt, daß die trigonometrischen Polynome (39) nichtnegativ sind.

Ein zweiter Beweis der Ungleichung (67) kann folgendermaßen geführt werden. Sie besagt, daß

$$r^{-n} v_n(r, \varphi) = r^{-n} + \sum_{\nu=1}^n r^{\nu-n} k_\nu(\varphi)$$

für $0 < r < 1$ mit wachsendem r abnimmt (nicht wächst). Dies ist aber klar, da wegen (65) ersichtlich

$$(67') \quad -\frac{r^{n+1}}{n} \frac{d}{dr} (r^{-n} v_n(r, \varphi)) = 1 + \sum_{\nu=1}^n \left(1 - \frac{\nu}{n}\right) r^\nu k_\nu(\varphi) > 0$$

ist³⁰⁾.

Aus (67) erhalten wir, ähnlich wie in § 4, den folgenden Satz:

Der Abschnitt $v_n(r, \varphi)$ einer Entwicklung aus $\S$ besitzt auf einem Radius $\varphi = \varphi_0$ des Einheitskreises höchstens eine Nullstelle.

Ist (ϱ, φ_0) , $0 < \varrho < 1$ eine solche Nullstelle, so ist der Abschnitt $v_n(r, \varphi_0)$ in $0 \leq r < \varrho$ positiv, in $\varrho < r \leq 1$ dagegen negativ und überdies abnehmend.

3. Es sei $c \geq 0$ und $r_n^*(c)$ bezeichne den Radius des größten Kreises $r \leq r_n^*(c)$, in dem $v_n(r, \varphi) \geq -c$ gilt.

²⁸⁾ Dies ist eine Folge des Fejérschen Satzes über die arithmetischen Mittel der Partialsummen der Fourierschen Reihe.

²⁹⁾ Vgl. G. Szegö, Koeffizientenabschätzungen bei ebenen und räumlichen harmonischen Entwicklungen [Math. Annalen **96** (1927), S. 601–632], § 1.

³⁰⁾ Man vgl. hierzu: M. Fekete, Sur une propriété des racines des moyennes arithmétiques d'une série entière réelle [Comptes rendus **157** (1913), S. 574–577], Formel (3).

In der unter 1) zitierten Arbeit von I. Schur und G. Szegö ist

$$(68) \quad r_n^*(0) = 1 - \frac{\log n}{n} + \frac{\log \log n}{n} - \frac{\log 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

gezeigt worden, und wir behaupten hier, daß auch für $c > 0$ (also anders wie bei den analogen $r_n(c)$ aus § 4)³¹⁾

$$(69) \quad r_n^*(c) = 1 - \frac{\log n}{n} + \frac{\log \log n}{n} - \frac{\log 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

gilt.

In der Tat ist zunächst $r_n^*(c) \geq r_n^*(0)$. Um $r_n^*(c)$ auch nach oben abzuschätzen, betrachte man die Abschnitte $v_n(r, \varphi)$ der speziellen Funktion (63) für ein

$$(70) \quad r = 1 - \frac{\log n}{n} + \frac{\log \log n}{n} + \frac{\gamma}{n},$$

wo γ eine Konstante $> -\log 2$ sein soll. Wir behaupten dann, und damit wird alles bewiesen sein, daß

$$(71) \quad v_n(r, \pi) \quad \text{bzw.} \quad v_n\left(r, \pi - \frac{\pi}{n}\right) \rightarrow -\infty,$$

je nachdem n die ungeraden bzw. die geraden Zahlen durchlaufend gegen ∞ geht. Es ist nämlich

$$1 - r^2 = 2 \frac{\log n}{n} + O\left(\frac{\log \log n}{n}\right),$$

$$n \log r = -\log n + \log \log n + \gamma + O\left(\frac{\log^2 n}{n}\right),$$

also

$$r^n = e^{\gamma \frac{\log n}{n}} + O\left(\frac{\log^2 n}{n^2}\right);$$

folglich gilt, wenn, wie in (71), $\varphi_n = \pi$ bzw. $\varphi_n = \pi - \frac{\pi}{n}$ gesetzt wird, je nachdem n ungerade oder gerade ausfällt,

$$\cos n \varphi_n = -1, \quad \cos(n+1) \varphi_n = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\begin{aligned} 1 - r^2 + 2 r^{n+2} \cos n \varphi_n - 2 r^{n+1} \cos(n+1) \varphi_n \\ = 2 \frac{\log n}{n} - 2 \frac{\log n}{n} e^{\gamma} - 2 \frac{\log n}{n} e^{\gamma} + O\left(\frac{\log \log n}{n}\right). \end{aligned}$$

Schließlich hat man

$$1 + r^2 - 2 r \cos \varphi_n = (1 + r)^2 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = 4 + o(1).$$

³¹⁾ $r_n^*(c)$ ist der Radius des größten Kreises $z \leq r_n^*(c)$, in dem für die Abschnitte $s_n(z)$ aller Potenzreihen der Klasse $\mathfrak{E}$

$$|s_n(z) + c s_n(0)| \leq 1 + c$$

gilt. Es ist folglich $r_n^*(0) = r_n(0)$. Für $c > 0$ hängen jedoch $r_n^*(c)$ und $r_n(c)$ nicht unmittelbar miteinander zusammen.

Damit ist für $\gamma > -\log 2$, d. h. $1 - 2e^\gamma < 0$

$$v_n(r, \varphi_n) = \frac{1 - r^2 + 2r^{n+2} \cos n\varphi_n - 2r^{n+1} \cos(n+1)\varphi_n}{1 + r^2 - 2r \cos \varphi_n} \sim \frac{1}{2} \frac{\log n}{n} (1 - 2e^\gamma) \rightarrow -\infty$$

bewiesen. Da man γ beliebig nahe an $-\log 2$ wählen kann, folgt hieraus (69).

4. Es gilt auf jedem Radius $\varphi = \text{konst.}$, analog (30),

$$(72) \quad \int_0^1 v_n(\varrho, \varphi) d\varrho \geq 0.$$

Dies folgt unmittelbar aus dem Ergebnis des § 5.

5. Das Analogon von (32) ist für unsere Klasse von Entwicklungen *nicht richtig*, d. h. die Ausdrücke

$$(73) \quad \frac{v_n(r, \varphi) - r^n v_n(1, 0)}{1 - r^n},$$

wo (r, φ) in dem Gebiete $\mathfrak{G}_\sigma$ des § 6 variiert, bleiben (für genügend nahe an 1 gelegene σ) nicht notwendig gleichmäßig in den n nach unten beschränkt.

Der Beweis dieser Behauptung beruht wieder auf der Diskussion der speziellen Entwicklung (63). Wir setzen

$$\sigma = \cos \delta \quad \left(0 < \delta < \frac{\pi}{2}\right), \quad \operatorname{tg} \delta = \tau > 0$$

und es sei $0 < \varphi < \delta$. Dann liegt, wie man leicht sieht, der Punkt

$$(74) \quad \left(r = \frac{\cos \delta}{\cos(\delta - \varphi)}, \varphi\right)$$

auf dem Rande von $\mathfrak{G}_\sigma$. Wir setzen $\varphi = \frac{\psi}{n}$, $\psi > 0$ fest. Dann ist bei wachsendem n

$$r = 1 - \frac{\tau \psi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

folglich für $\nu = 1, 2, \dots, n$

$$r^\nu = \exp(\nu \log r) = \exp\left\{-\tau \psi \frac{\nu}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right\} = e^{-\tau \psi \frac{\nu}{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Für die spezielle Funktion (63) lautet nun (73), wenn man r wie in (74) wählt und $\varphi = \frac{\psi}{n}$ setzt,

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{2}{1 - r^n} \left(\sum_{\nu=1}^n r^\nu \cos \nu \varphi - n r^n \right) \\ &= \frac{2}{1 - e^{-\tau \psi}} \left(\sum_{\nu=1}^n e^{-\tau \psi \frac{\nu}{n}} \cos \psi \frac{\nu}{n} - n e^{-\tau \psi} \right) + O(1) = n h_n, \end{aligned}$$

wobei

$$h_n = \frac{2}{1 - e^{-\tau\psi}} \left(\frac{1}{\psi} \int_0^{\psi} e^{-\tau x} \cos x \, dx - e^{-\tau\psi} \right) + o(1)$$

ist. Der Klammerausdruck wird für $\tau = 0$ gleich $\frac{\sin \psi}{\psi} - 1 < 0$; er wird also bei festem $\psi > 0$ auch für genügend kleines τ , d. h. für genügend kleines δ , negativ sein, womit alles bewiesen ist.

Ebensowenig bleiben die den Kreiskoppelungen des § 3 entsprechenden Ausdrücke notwendig in ihrer Gesamtheit nach unten beschränkt.

§ 8.

Räumliche harmonische Entwicklungen.

1. Es sei

$$(75) \quad U(r, \vartheta, \varphi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n K_n(\vartheta, \varphi)$$

eine in der Einheitskugel $r < 1$ konvergente harmonische Entwicklung, die daselbst positiv ist; $r^n K_n(\vartheta, \varphi)$ bedeutet dabei eine Kugelfunktion n -ter Ordnung. Die Abschnitte

$$(76) \quad V_n(r, \vartheta, \varphi) = 1 + \sum_{\nu=1}^n r^\nu K_\nu(\vartheta, \varphi)$$

brauchen auch hier nicht für $r \leq 1$ gleichmäßig in n nach unten beschränkt zu sein³²⁾. Dagegen gilt für die arithmetischen Mittel zweiter Ordnung der $V_n(r, \vartheta, \varphi)$ das folgende Analogon von (65)³³⁾:

$$(77) \quad 1 + \sum_{\nu=1}^n \left(1 - \frac{\nu}{n+1}\right) \left(1 - \frac{\nu}{n+2}\right) r^\nu K_\nu(\vartheta, \varphi) \geq 0 \quad (r \leq 1).$$

Hieraus folgt wie im § 7:

$$(78) \quad \frac{d^2}{dr^2} (r^{-n} V_n(r, \vartheta, \varphi)) \geq 0 \quad (r \leq 1),$$

so daß $r^{-n} V_n(r, \vartheta, \varphi)$ auf jedem Radius der Einheitskugel eine nach unten konvexe (nicht konkave) Funktion von r ist.

Der Abschnitt $V_n(r, \vartheta, \varphi)$ einer Entwicklung (75) besitzt hiernach auf jedem Radius der Einheitskugel höchstens zwei Nullstellen.

Setzt man der Kürze halber $r^{-n} V_n(r, \vartheta, \varphi) = r^{-n} V_n(r) = F(r)$, so gilt nach (78):

$$(78') \quad pF(r') - F(pr' + qr'') + qF(r'') \geq 0 \\ (0 \leq r', r'' \leq 1; p \geq 0, q \geq 0, p + q = 1).$$

³²⁾ Vgl. G. Szegő, a. a. O. ²⁹⁾, § 4.

³³⁾ L. Fejér, Über die Laplacesche Reihe [Math. Annalen **67** (1909), S. 76–109], § 3.

Hieraus folgt z. B. für $r' = r$, $r'' = \varrho^2 r$, $p = \frac{\varrho}{1+\varrho}$, $q = \frac{1}{1+\varrho}$ die Ungleichung

$$(79) \quad V_n(\varrho^2 r) - \varrho^n(1+\varrho)V_n(\varrho r) + \varrho^{2n+1}V_n(r) \geq 0 \\ (0 \leq r, \varrho \leq 1; n = 1, 2, 3, \dots).$$

Für den Fall der speziellen Entwicklung

$$(80) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) r^n P_n(\cos \vartheta)$$

ergibt (79) das folgende Analogon des im § 2 bewiesenen Satzes über das trigonometrische Polynom (39):

$$(81) \quad \sum_{\nu=0}^n (2\nu+1) (\varrho^\nu - \varrho^n) (\varrho^\nu - \varrho^{n+1}) P_\nu(\cos \vartheta) \geq 0 \\ (0 \leq \varrho \leq 1; n = 1, 2, 3, \dots).$$

Dividiert man für $\varrho < 1$ die Ungleichung (79) durch $(1 - \varrho^n)(1 - \varrho^{n+1})$ und geht zur Grenze $\varrho \rightarrow 1$ über, so folgt wieder (77).

2. Das Analogon von (72) im räumlichen Falle ist nicht richtig, wie das Beispiel (80) zeigt, wo

$$\int_0^1 (P_0(\cos \vartheta) + 3\varrho P_1(\cos \vartheta)) d\varrho = 1 + \frac{3}{2} \cos \vartheta$$

auch negativer Werte fähig ist. Dagegen gilt für die Abschnitte von (75)

$$(82) \quad \int_0^1 V_n(\varrho^2, \vartheta, \varphi) d\varrho \geq 0.$$

In der Tat genügt es, dies für die spezielle Entwicklung (80) zu zeigen. Dann lautet aber (82):

$$P_0(\cos \vartheta) + P_1(\cos \vartheta) + \dots + P_n(\cos \vartheta) \geq 0,$$

eine Ungleichung, welche von Herrn L. Fejér stammt³⁴⁾ und in der Theorie der Laplaceschen Reihe eine hervorragende Rolle spielt.

Königsberg, Februar 1927.

³⁴⁾ A. a. O. ³³⁾, S. 83.

(Eingegangen am 5. Februar 1927.)

Bemerkung zu meiner Arbeit „Über den Begriff extreme Krümmung und eine kennzeichnende Eigenschaft der Ellipse“¹⁾.

Von

Paul Funk in Prag.

Bei Vergleichung zweier möglicher Verallgemeinerungen des Begriffs geodätische Krümmung für Variationsprobleme wurde ich auf folgende geometrische Fragestellung geführt.

Sei J eine stetige, gekrümmte geschlossene Kurve (Indikatrix), O ein Punkt im Innern derselben. Denken wir uns nun in irgendeinem Punkt A von J die dreipunktig berührende Ellipse mit O als Mittelpunkt gezeichnet und verfolgen wir sie entsprechend einem auf J vorgegebenen Durchlaufungssinn bis zu dem zu A konjugierten Punkt B . Unter welcher Bedingung liegt dann B stets auf J ? Die Antwort lautet offenbar, daß dies nur bei Ellipsen der Fall ist. Bei meinen damaligen Betrachtungen machte ich von vornherein die einschränkende Annahme, J sei eine Mittelpunktskurve. Außerdem ist die Zurückführung auf eine dort behandelte affin-geometrische Schließungsaufgabe nicht vollständig durchgeführt.

Und so möchte ich mir erlauben, hier einen kurzen Beweis für den oben genannten Satz zu geben (wobei wir allerdings außer der Stetigkeit noch die zweimalige Differenzierbarkeit der Krümmung nach einem gewissen Parameter voraussetzen).

Bezeichnen wir wie damals den Vektor OA mit $\mathfrak{x}$, den Vektor OB mit $\mathfrak{y}$. Beschreibt $\mathfrak{x}$ die Kurve J mit der Flächengeschwindigkeit $\frac{1}{2}$, dann gilt

$$\mathfrak{x} \times \mathfrak{x}' = 1, \quad \mathfrak{x}'' = -\frac{1}{\lambda^2} \mathfrak{x},$$

wobei λ einen Skalar bedeutet; für $\mathfrak{y}$ ergibt sich dann

$$\mathfrak{y} = \lambda \mathfrak{x}', \quad \mathfrak{y} \times \mathfrak{y}' = 1, \quad \mathfrak{y}'' = \left(\frac{\lambda''}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} \right) \mathfrak{y}.$$

¹⁾ Vgl. Math. Zeitschrift 3 (1919), S. 87.

Soll die von χ und η beschriebene Kurve dieselbe sein, so muß, wenn T die Umlaufszeit bedeutet,

$$\int_0^T \left(\frac{\lambda''}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} \right) dt = - \int_0^T \frac{dt}{\lambda^2}$$

sein. Wegen

$$\frac{\lambda''}{\lambda} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\lambda'}{\lambda} \right) + \frac{\lambda'^2}{\lambda^2}$$

und weil λ eine periodische Funktion mit der Periode T sein muß, ist dies aber nur dann möglich, wenn

$$\int_0^T \frac{\lambda'^2}{\lambda^2} dt = 0,$$

d. h. wenn λ eine Konstante und J eine Ellipse ist.

(Eingegangen am 6. Mai 1927.)

Über die Geometrie von Laguerre. IX. Begleitende Dupinsche Zykliden bei Streifen. *W*-Kugelscharen und *W*-Streifen.

Von

Heinrich Schatz in Innsbruck.

Die vorliegende Arbeit schließt an eine Untersuchung der Streifen in der Geometrie von Laguerre an, die 1926 in Bd. V der Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität erschienen ist. (Über die Geometrie von Laguerre. VIII. Über Streifen im Raum, zitiert als L. VIII.) Es sollen hier einige einfache Anwendungen dieser Theorie gemacht werden. Diese Arbeit berührt sich mit einer demnächst erscheinenden Untersuchung von G. Thomsen über Streifen in der Lieschen Kugelgeometrie.

§ 1.

Dupinsche Zyklide, die den Streifen begleitet.

Wenn ein Streifen (Krümmungsstreifen sollen ausgeschlossen sein) etwa durch seine Invarianten R, S, T als Funktionen des Parameters s gegeben ist, so gibt es im allgemeinen eine begleitende Dupinsche Zyklide vom elliptischen oder hyperbolischen Typ, auf welcher vier konsekutive Elemente des Streifens liegen. (Diese beiden Typen sind nach L. VIII, § 4 äquivalent; wir wollen sie der Kürze halber mit Z_1 bezeichnen.) In besonderen Fällen kann die begleitende Zyklide ausarten (sie kann etwa parabolisch werden) oder es kann unendlich viele begleitende Zykliden geben. Es soll zunächst der allgemeinste Fall untersucht werden. Dann gibt es eine begleitende Zyklide Z_1 und ihre Lage und Größe kann durch R, S, T und R' ausgedrückt werden.

Wir gebrauchen im folgenden die Bezeichnungen aus L. VIII, es seien also $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{v}$ die dort in § 1 normierten Vektoren, s der in § 2 festgelegte Parameter. Durch $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{v}$ als Funktionen von s ist ein Streifenelement (Kugel

und berührende Ebene) festgelegt. Wir erhalten dasselbe Element, wenn wir statt $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{v}$ irgend zwei Kugeln des Büschels $\mathfrak{x} + \lambda \mathfrak{v}$ herausnehmen, etwa $\mathfrak{y} = \mathfrak{x} + \alpha \mathfrak{v}$ und $\mathfrak{z} = \mathfrak{x} + \beta \mathfrak{v}$. (Denn die Kugeln $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ berühren sich im Streifenpunkt.) Betrachten wir noch die Nachbarelemente unseres Streifenelementes, so steckt in $\mathfrak{y}', \mathfrak{y}'', \dots, \mathfrak{z}', \mathfrak{z}'', \dots$ noch ein willkürliches $\alpha', \alpha'', \dots, \beta', \beta'', \dots$ darin. Durch geeignete Wahl dieser Größen $\alpha', \alpha'', \dots$ können wir über die Auswahl der Streifenkugeln in ihrem Büschel verfügen.

Nach L. VIII, § 4 ist eine Dupinsche Zyklide Z_1 in zwei Arten Hüllgebilde einer Schar von ∞^1 gerichteten Kugeln, die drei vorgegebene Kugeln allgemeiner Lage berühren. Durch isotrope Projektion entsprechen im R_4 diesen Kugelscharen zwei Kreise, die in zwei aufeinander senkrechten Ebenen liegen; die Mittelpunkte der beiden Kreise fallen in den gemeinsamen Punkt der beiden Ebenen zusammen.

Wir suchen jetzt in vier konsekutiven Elementen des Streifens je zwei Kugeln aus dem Büschel $\mathfrak{x} + \lambda \mathfrak{v}$ so auszuwählen, daß diese Kugeln die einhüllenden Kugeln der Z_1 werden. Die Kugeln $\mathfrak{y}$ mögen der einen Schar entsprechen, die Kugeln $\mathfrak{z}$ der anderen. Wir erhalten zunächst

$$(1) \quad \begin{aligned} \mathfrak{y} &= \mathfrak{x} + \alpha \mathfrak{v}, \quad \mathfrak{y}' = \mathfrak{x}' + \alpha' \mathfrak{v} + \alpha \mathfrak{v}', \dots \\ \mathfrak{z} &= \mathfrak{x} + \beta \mathfrak{v}, \quad \mathfrak{z}' = \mathfrak{x}' + \beta' \mathfrak{v} + \beta \mathfrak{v}', \dots \end{aligned}$$

Unsere Z_1 ist durch Angabe einer Schar gegeben, es genügt also die Kenntnis von $\alpha, \alpha', \alpha''$ zu ihrer Bestimmung.

Wir haben jetzt folgende Bedingungen: 1. Die Kugel $\mathfrak{z}$ muß vier konsekutive Kugeln $\mathfrak{y}$ berühren und umgekehrt muß $\mathfrak{y}$ vier konsekutive Kugeln $\mathfrak{z}$ berühren. 2. Die Ebene, die durch $\mathfrak{y}', \mathfrak{y}''$ aufgespannt wird, muß senkrecht stehen auf der durch $\mathfrak{z}', \mathfrak{z}''$ aufgespannten Ebene. 3. Da vier konsekutive Kugeln der Z_1 angehören sollen, muß auch noch $\mathfrak{z}'''$ der ebenen Schar $\langle \mathfrak{z}', \mathfrak{z}'' \rangle$ ¹⁾ angehören, entsprechendes gilt für $\mathfrak{y}'''$. Das gibt die Bedingungen

$$(2) \quad \begin{aligned} (\mathfrak{y} - \mathfrak{z})^2 &= 0, (\mathfrak{y} - \mathfrak{z}) \mathfrak{y}' = 0, (\mathfrak{y} - \mathfrak{z}) \mathfrak{y}'' = -\mathfrak{y}'^2, (\mathfrak{y} - \mathfrak{z}) \mathfrak{y}''' = -3\mathfrak{y}' \mathfrak{y}'', \\ \text{und} \end{aligned}$$

$$(\mathfrak{y} - \mathfrak{z}) \mathfrak{z}' = 0, (\mathfrak{y} - \mathfrak{z}) \mathfrak{z}'' = \mathfrak{z}'^2, (\mathfrak{y} - \mathfrak{z}) \mathfrak{z}''' = 3\mathfrak{z}' \mathfrak{z}''$$

und folgende Tafel von Skalarprodukten:

$$(3) \quad \begin{array}{c|ccc} & \mathfrak{y}' & \mathfrak{y}'' & \mathfrak{y}''' \\ \hline \mathfrak{z}' & 0 & 0 & 0 \\ \mathfrak{z}'' & 0 & 0 & 0 \\ \mathfrak{z}''' & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

¹⁾ D. h. der durch $\mathfrak{z}'$ und $\mathfrak{z}''$ aufgespannten Ebene.

Setzt man $\eta', \eta'', \dots, \zeta', \zeta'', \dots$ aus den Gleichungen (1) in (2) und (3) ein und berücksichtigt man die Ableitungsgleichungen aus L. VIII, (13), nämlich

$$(4) \quad \boxed{\begin{aligned} \xi'' &= R \eta' + S \eta, \\ \eta'' &= -R \xi' + T \eta - w, \\ w' &= -S \xi' - T \eta', \end{aligned}}$$

so erhält man für $\alpha, \alpha', \alpha''$ und β, β', β'' die Bedingungsgleichungen:

$$(5) \quad \text{aus} \quad \left\{ \begin{aligned} \eta' \zeta' &= 0 \dots 1 + \alpha \beta = 0, \\ \eta' \zeta'' &= 0 \dots \alpha R - \beta R - \alpha' \beta + 2 \alpha \beta' = 0, \\ \eta'' \zeta' &= 0 \dots \beta R - \alpha R - \beta' \alpha + 2 \alpha' \beta = 0, \\ \eta' \zeta''' &= 0 \dots 3 \alpha \beta'' - \alpha' R - 3 \beta' R - 3 \alpha' \beta' + \alpha (R' + S) \\ &\quad + \beta (S - R') - 2 T = 0, \\ \zeta' \eta''' &= 0 \dots 2 \beta \alpha'' - \beta' R - 3 \alpha' R - 3 \alpha' \beta' + \beta (R' + S) \\ &\quad + \alpha (S - R') - 2 T = 0, \\ \eta'' \zeta'' &= 0 \dots 2 \alpha' R - \alpha S - \alpha \beta'' + 2 \beta' R + 4 \alpha' \beta' - \beta S \\ &\quad - \beta \alpha'' + 2 T = 0. \end{aligned} \right.$$

Die entsprechenden Gleichungen aus (2) ergeben Bedingungen, die mit den Bedingungen (5) verträglich sind. Aus (5) folgt, wenn wir zur Abkürzung setzen:

$$(6) \quad W = \sqrt{S^2 + T^2} \quad (\text{positive Wurzel}),$$

$$\alpha = \frac{T+W}{S},$$

$$(7) \quad \alpha' = -\frac{2RW}{3S^2}(T+W),$$

$$\alpha'' = \frac{2W}{9S^3}(T+W)(-3R'S + 2R^2T + 2R^2W)$$

und für β, β', β'' die entsprechenden Ausdrücke, wenn in (7) immer $-W$ statt W geschrieben wird.

Auf die Fälle, in denen die Auflösung des Systems (5) nicht möglich ist, kommen wir im nächsten Paragraphen zurück.

Wir wollen noch den Mittelpunkt m und den Radius r der Zyklide bestimmen. Für m und r gilt

$$m = \eta + A \eta' + B \eta'',$$

$$r^2 = (m - \eta)^2 = A^2 \eta'^2 + 2AB \eta' \eta'' + B^2 \eta''^2,$$

Da r fest ist, folgt aus $(m - \eta)^2 = r^2$

$$(8) \quad (m - \eta) \eta' = 0, \quad (m - \eta) \eta'' = \eta'^2$$

und daraus für A und B

$$(9) \quad A = - \frac{\eta'^2 \cdot \eta' \eta''}{\eta'^2 \eta''^2 - (\eta' \eta'')^2}, \quad B = \frac{(\eta'^2)^2}{\eta'^2 \cdot \eta''^2 - (\eta' \eta'')^2}$$

und

$$r^2 = \frac{(\eta'^2)^3}{\eta'^2 \eta''^2 - (\eta' \eta'')^2}.$$

Setzen wir in η', η'' die gefundenen Werte $\alpha, \alpha', \alpha''$ ein und führen noch die Abkürzung ein:

$$(10) \quad N = 6 R' S - 2 R^2 T - 9 S^2,$$

so erhalten wir

$$A = \frac{3 R S}{N}, \quad B = - \frac{9(T-W)}{N}, \quad r^2 = \frac{18 W}{N}.^2)$$

Zuletzt fragen wir uns noch, ob die Kugeln η die elliptische oder hyperbolische Zyklide bestimmen. Dazu suchen wir etwa die isotropen Richtungen der Ebene $\langle \eta' \eta'' \rangle$ auf. Das gibt die Gleichung für ϱ

$$(\eta' + \varrho \eta'')^2 = 0$$

und

$$\varrho = - \frac{\eta' \eta'' \pm \Delta}{\eta''^2},$$

worin

$$(11) \quad \Delta = \eta'^2 \eta''^2 - (\eta' \eta'')^2 = - \frac{4 W^2 (T+W)^3}{9 S^6} N.$$

Wir erhalten also reelle Nullrichtungen (indefinites Maß der Ebene $\langle \eta' \eta'' \rangle$ d. h. den hyperbolischen Fall) wenn $\Delta > 0$. Entsprechend ergibt sich die elliptische Zyklide, wenn $\Delta < 0$.

§ 2.

Ausartungen der begleitenden Zyklide.

Bisher haben wir angenommen, daß das Gleichungssystem (5) nach den α und β auflösbar sei, ferner daß der Radius der Zyklide endlich und ungleich Null sei und schließlich, daß die Ebene³⁾, die durch drei konsequente Kugeln η bestimmt wird, definites oder indefinites Maß habe. Wenn wir uns auf Streifen mit reellen Invarianten beschränken, haben wir folgende Unterfälle zu berücksichtigen:

1. $S = 0$. Gehen wir auf das System (5) zurück, dann folgt aus den drei letzten Gleichungen, wenn wir $\alpha \beta'' + \beta \alpha''$ eliminieren,

$$(12) \quad \alpha' R + \beta' R + 3 \alpha' \beta' - T = 0,$$

²⁾ Für die Schar $\beta \beta' \beta''$ entsprechend $r^2 = \frac{-18 W}{N}$.

³⁾ Eigentlich: Ebene Kugelkongruenz, deren Bild im R_4 eine Ebene ist.

und wenn wir vorläufig $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ voraussetzen, aus den drei ersten Gleichungen

$$(13) \quad \alpha' = -\frac{1+\alpha^2}{3}R, \quad \beta' = -\frac{1+\alpha^2}{3\alpha^2}R$$

und somit aus (12) $T=0$. Für $T=0$ ist aber die Gleichung (12) identisch erfüllt, d. h. wenn wir irgendein α vorgeben, das von Null verschieden ist, so gibt es dazu aus (5) und (12) immer eindeutig ein α' , α'' , β , β' , β'' , also eine begleitende Zyklide. Da α willkürlich ist, gibt es in diesem Falle ($S=0$, $T=0$) ∞^1 begleitende Zykliken.

Lassen wir die Annahme $\alpha \neq 0$ fallen, so können wir die Kugeln η und ζ in folgender Weise ansetzen:

$$(14) \quad \begin{aligned} \eta &= x, \eta' = x' + \alpha'v, \eta'' = x'' + \alpha''v + 2\alpha'v', \\ \eta''' &= x''' + \alpha'''v + 3\alpha''v' + 3\alpha'v'', \\ \zeta &= \beta v, \zeta' = \beta'v + \beta v', \zeta'' = \beta''v + 2\beta'v' + \beta v'', \\ \zeta''' &= \beta'''v + 3\beta''v' + 3\beta'v'' + \beta v'''. \end{aligned}$$

Dann ist

$$(15) \quad \begin{aligned} \eta' \zeta' &= 0, \\ \eta' \zeta'' &= -\beta R - \beta \alpha' = 0 \text{ oder, da } \beta \neq 0, \alpha' = -R, \\ \eta' \zeta''' &= -3\beta'R - \beta R' - 3\alpha'\beta' = 0, \text{ d. h. } \beta R' = 0, \text{ also } R' = 0, \\ \eta'' \zeta' &= \beta R + 2\alpha'\beta = 0, \text{ daraus } \alpha' = -\frac{R}{2}, \text{ somit } R = 0, \\ \eta'' \zeta'' &= -\alpha''\beta = 0, \text{ d. h. } \alpha'' = 0. \end{aligned}$$

Wenn also $S=0$, $R=0$, T beliebig, so ist die begleitende Zyklide ein Drehkegel. Im Falle $S=0$, $R \neq 0$, $T \neq 0$ gibt es keine begleitende Zyklide.

2. Der Fall $W=0$, also $S^2 + T^2 = 0$ gibt nichts Neues, da er schon unter (1) auftritt.

3. Betrachten wir endlich noch den Fall $N=0$ oder

$$N = 6R'S - 2R^2T - 9S^2 = 0,$$

so bleibt, wenn $S \neq 0$, $W \neq 0$, alles vom allgemeinen Fall gültig, hingegen verschwindet das Δ in (11), die Ebene $\langle \eta' \eta'' \rangle$ hat nur eine Nullrichtung. Man heißt die Zyklide in diesem Falle *parabolisch*.

Wir können das Ergebnis in folgender Tafel zusammenfassen.

	S	W	N	R	Begleitende Zyklide
1	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$		Allgemeine Z_1 .
2	$\neq 0$	$\neq 0$	$= 0$		Parabolische Zyklide.
3	$= 0$	$= 0$			∞^1 Zykliken.
4	$= 0$	$\neq 0$		$= 0$	Drehkegel.
5	$= 0$	$\neq 0$		$\neq 0$	Keine begleitende Zyklide.

(16)

§ 3.

Streifen auf Dupinschen Zykliden vom Typus Z_1 .

Wir haben in L. VIII (31) die Bedingungen dafür gefunden, daß ein Streifen auf einer Dupinschen Zyklide Z_1 liegt. Diese Bedingungen haben gelautet:

$$(17) \quad \begin{aligned} R &= -\frac{3\dot{\eta}}{a\eta\sqrt{1+\eta^2}}, \\ -S &= \frac{1}{a^2\eta^2}(2\eta\dot{\eta} - 3\dot{\eta}^2 - \eta^2(1+\eta^2)), \\ -R^2 + 2T &= \frac{1}{a^2\eta^2}\left(-\frac{3\dot{\eta}^2(1+3\eta^2-\eta^4)}{\eta^2(1+\eta^2)} + \frac{2\dot{\eta}(1-\eta^2)}{\eta} - (1-\eta^4)\right). \end{aligned}$$

Darin bedeuten Punkte Ableitungen nach einem allgemeinen Parameter p , a den Radius der Zyklide und η den Steigwinkel des Streifens im sphärischen Bild. Dabei wurden folgende Einschränkungen gemacht: Der Streifen soll nicht Krümmungsstreifen sein ($\eta \neq 0$, η endlich), $1+\eta^2 \neq 0$ (das sphärische Bild des Streifens soll die Einheitskugel nicht längs Minimalkurven berühren), a soll endlich und ungleich Null sein. Führen wir statt p den Streifenparameter s ein, so zeigt eine einfache Rechnung, daß

$$(18) \quad \frac{ds}{dp} = \frac{a\eta}{\sqrt{1+\eta^2}}$$

und

$$(19) \quad \dot{\eta} = \eta' \cdot \frac{a\eta}{\sqrt{1+\eta^2}}, \quad \ddot{\eta} = \eta'' \cdot \frac{a^2\eta^2}{1+\eta^2} + \eta'^2 \cdot \frac{a^3\eta}{(1+\eta^2)^2},$$

wenn Striche Ableitungen nach s bedeuten.

Schreiben wir die Bedingungen (17) in diesen Parameter um, so erhalten wir:

$$(20) \quad \begin{aligned} R &= -\frac{3\eta'}{1+\eta^2}, & S &= -\frac{2\eta''}{1+\eta^2} + \eta'^2 \cdot \frac{1+3\eta^2}{\eta(1+\eta^2)^2} + \frac{1+\eta^2}{a^3\eta}, \\ 2T &= \eta'' \cdot \frac{2(1-\eta^2)}{\eta(1+\eta^2)} - \eta'^2 \cdot \frac{(1-\eta^2)(1+3\eta^2)}{\eta^2(1+\eta^2)^2} - \frac{1-\eta^4}{a^2\eta^2} \end{aligned}$$

und daraus

$$(21) \quad R' = -\frac{3\eta''}{1+\eta^2} + \frac{6\eta\eta'^2}{(1+\eta^2)^2}.$$

Setzen wir wieder $W = \sqrt{S^2 + T^2}$, so erhält man für η, η', η'', a^2

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{T \pm W}{S}, & \eta' &= -\frac{2RW}{3S^2}(W \pm T), \\ \eta'' &= \frac{2W(W \pm T)}{9S^3}(-3R'S \pm 2R^2W + 2R^2T), \end{aligned}$$

und

$$(22) \quad a^2 = \pm \frac{18 W}{6 R' S - 2 R^2 T - 9 S^2} = \pm \frac{18 W}{N},$$

wenn wir auf die Abkürzung in (10) zurückgreifen.

η , η' und η'' stimmen somit mit unseren α , α' , α'' , β , β' , β'' in § 1 überein; wir können also sagen: Geben wir eine Dupinsche Zyklide (Z_1) vor und auf ihr einen Streifen, wofür $\eta \neq 0$, $1 + \eta^2 \neq 0$, η endlich sind, so sind durch (17) oder (20) die Invarianten des Streifens eindeutig berechenbar; umgekehrt: wenn wir einen allgemeinen Streifen gegeben haben (durch $R(s)$, $S(s)$, $T(s)$)⁴⁾, so gibt es eine und nur eine (Z_1), auf der dieser Streifen liegt, wenn wir nur bis zu Ableitungen dritter Ordnung gehen. Diese (Z_1) ist eben die begleitende Zyklide aus § 1 im allgemeinsten Falle, und wir haben jetzt eine geometrische Deutung für die dort auftretenden Größen α , α' , α'' gefunden: sie bedeuten den Steigungswinkel des Streifens auf der begleitenden Zyklide und seine erste und zweite Ableitung nach s .

§ 4.

Allgemeine Streifen auf parabolischen Zykliden.

Eine parabolische Zyklide kann in folgender Weise angesetzt werden:

$$x = x_0 + e_0 \frac{p^2}{2a} + e_1 \frac{p^2}{2a} + e_2 \cdot \sqrt{2} \cdot p.$$

Dabei bedeuten e_0 , e_1 , e_2 , e_3 Einheitsvektoren, die wechselseitig senkrecht stehen mit $e_0^2 = -1$, $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = 1$.⁵⁾ p ist ein allgemeiner Parameter. Setzen wir dazu ein v in folgender Weise an:

$$(24) \quad v = \varrho \left(e_0 \left(\frac{p^2 + q^2}{2a} + a \right) + e_1 \left(\frac{p^2 + q^2}{2a} - a \right) + e_2 \sqrt{2} p + e_3 \sqrt{2} q \right),$$

worin ϱ ein allgemeiner Faktor ist, q eine Funktion von p , $q = q(p)$, so haben wir durch x und v einen allgemeinen Streifen auf einer parabolischen Zyklide angeschrieben (es ist ja unsere Streifenbedingung $\dot{x}v = 0$, $\dot{v}^2 = 0$ erfüllt), ferner $\dot{x}^2 \neq 0$, $\dot{v}^2 \neq 0$.

Rechnen wir uns auch hier nach den Regeln in § 1 in L. VIII die Invarianten für unseren Streifen aus, und schreiben wir für $\dot{q} = \frac{dq}{dp}$ wieder η , so ergibt sich nach ziemlich mühsamer Rechnung (welche ähnlich verläuft wie die in L. VIII (29) angedeutete)

⁴⁾ Mit den Einschränkungen $S \neq 0$, $W \neq 0$, $N \neq 0$.

⁵⁾ Vgl. L. VIII (25).

$$(25) \quad R = \frac{3\dot{\eta}}{\eta\sqrt{2}\sqrt{1+\eta^2}}, \quad S = \frac{2\eta\ddot{\eta} - 3\dot{\eta}^2}{3\eta^2}, \quad T = \frac{3\dot{\eta}^2 + 2\eta\ddot{\eta}}{2\eta^4}(\eta^2 - 1)$$

oder, wenn wir wieder den Streifenparameter s einführen:

$$(26) \quad R = \frac{3\eta'}{1+\eta^2}, \quad S = \frac{2\eta''}{1+\eta^2} - \frac{\eta'^2}{\eta} \cdot \frac{1+3\eta^2}{(1+\eta^2)^2}, \quad \frac{2T\eta}{1-\eta^2} = S$$

und $R' = \frac{3\eta''}{1+\eta^2} - \frac{6\eta\eta'^2}{(1+\eta^2)^2},$

und daraus durch Elimination von η, η', η'' die Beziehung zwischen R, S, T

$$N = 6R'S - 2TR^2 - 9S^2 = 0.$$

Ferner erhalten wir

$$\eta = \frac{-T \pm W}{S}, \quad \eta' = \frac{2RW}{3S^2}(W \pm T).$$

Zusatz. Streifen auf Drehkegeln.

Ein solcher Streifen wird dargestellt durch

$$(28) \quad \begin{aligned} \mathfrak{x} &= \mathfrak{x}_0 + s\mathfrak{e}_3, \\ \mathfrak{v} &= \varrho(\mathfrak{e}_0 + \mathfrak{e}_1 \cos \varphi + \mathfrak{e}_2 \sin \varphi), \end{aligned}$$

worin $\mathfrak{e}_0, \mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ nach L. VIII (25) Einheitsvektoren sind, s der normierte Parameter und ϱ ein willkürlicher Faktor. Durch Normierung des $\mathfrak{v}$ ergibt sich $\varrho = \frac{1}{\dot{\varphi}}$; der Streifen hat die Invarianten $R = 0, S = 0, T = T(s)$.

§ 5.

Zusammenhang zwischen W -Kugelscharen und W -Streifen.

Mit jeder W -Kugelschar (d. h. einer Kugelschar, die eine eingliedrige Gruppe von Laguerre-Transformationen gestattet⁶⁾, ist gleichzeitig ein W -Streifen verbunden, und umgekehrt bestimmt jeder W -Streifen eine W -Kugelschar. Wir beschränken uns mit dem Nachweis auf den allgemeinsten Fall.

Gehen wir zunächst von einem W -Streifen aus (vgl. L. VIII, § 5). Er sei durch $\mathfrak{x}, \mathfrak{v}$ in der normierten Form gegeben. Dann betrachten wir die Kugelschar $\mathfrak{x}(s)$; als begleitende Vektoren seien gewählt: 1. $\mathfrak{x}'(s)$, 2. $\mathfrak{p} = \kappa \cdot \mathfrak{x}''(s)$, wo κ so bestimmt ist, daß $\mathfrak{p}^2 = 1$, 3. zwei Vektoren $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{r}$, die auf $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{p}$ senkrecht stehen; ferner sei $\mathfrak{q}\mathfrak{r} = 0, \mathfrak{q}^2 = 1, \mathfrak{r}^2 = -1$. Dann besteht folgende Tafel von Skalarprodukten:

⁶⁾ Oder einer Kugelschar, in deren Ableitungsgleichungen die Invarianten konstant sind.

$$(29) \quad \begin{array}{c|cccc} & \mathfrak{x}' & \mathfrak{p} & \mathfrak{q} & \mathfrak{r} \\ \hline \mathfrak{x}' & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathfrak{p} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathfrak{q} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathfrak{r} & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}$$

Dadurch sind $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{r}$ bis auf eine willkürliche Konstante bestimmt. Das ist auch geometrisch leicht einzusehen: Es ist noch eine Drehung der Vektoren $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ in ihrer Ebene möglich

$$(\text{etwa } \bar{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q} \operatorname{ch} \varphi + \mathfrak{r} \operatorname{sh} \varphi, \quad \bar{\mathfrak{r}} = \mathfrak{q} \operatorname{sh} \varphi + \mathfrak{r} \operatorname{ch} \varphi,$$

wodurch die Produkte in der Tafel (29) nicht beeinflußt werden).

Drückt man $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ durch $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ aus, so folgt aus L. VIII, §§ 2, 3

$$(30) \quad \begin{aligned} \mathfrak{x}' &= \mathfrak{x}', & \mathfrak{p} &= \mathfrak{v}' + \frac{S}{R} \mathfrak{v}, \\ \mathfrak{q} &= -\frac{S}{R} \varrho \mathfrak{v}' + \frac{1 - \frac{S^2}{R^2} \varrho^2}{2\varrho} \mathfrak{v} + \varrho \mathfrak{w}, & \mathfrak{r} &= -\frac{S}{R} \varrho \mathfrak{v}' - \frac{1 + \frac{S^2}{R^2} \varrho^2}{2\varrho} \mathfrak{v} + \varrho \mathfrak{w}. \end{aligned}$$

Dabei steckt im Faktor ϱ die oben angegebene Willkür in der Festlegung von $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$. Wir drehen jetzt die $\mathfrak{q}\mathfrak{r}$ -Ebene so, daß $\varrho = 1$ wird. Dann ist $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ endgültig festgelegt⁷⁾. Dann folgt aus (30) umgekehrt:

$$(31) \quad \begin{aligned} \mathfrak{x}' &= \mathfrak{x}', & \mathfrak{v}' &= \mathfrak{p} - \frac{S}{R} \mathfrak{q} + \frac{S}{R} \mathfrak{r}, \\ \mathfrak{v} &= \mathfrak{q} - \mathfrak{r}, & \mathfrak{w} &= \frac{S}{R} \mathfrak{p} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{S^2}{R^2}\right) \mathfrak{q} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{S^2}{R^2}\right) \mathfrak{r}, \end{aligned}$$

und daraus mit Hilfe von § 1, 4 die Ableitungsgleichungen:

$$(32) \quad \begin{aligned} \mathfrak{x}'' &= R\mathfrak{p}, \\ \mathfrak{p}' &= -R\mathfrak{x}' + \left(-\frac{1}{2} + \left(T - \frac{S^2}{2R^2}\right)\right) \mathfrak{q} + \left(-\frac{1}{2} - \left(T - \frac{S^2}{2R^2}\right)\right) \mathfrak{r}, \\ \mathfrak{q}' &= \left(\frac{1}{2} - \left(T - \frac{S^2}{2R^2}\right)\right) \mathfrak{p} + \frac{S}{R} \mathfrak{r}, & \mathfrak{r}' &= \left(-\frac{1}{2} - \left(T - \frac{S^2}{2R^2}\right)\right) \mathfrak{p} + \frac{S}{R} \mathfrak{q}. \end{aligned}$$

Betrachten wir jetzt eine Kugelschar im R_3 $\mathfrak{x}(t)$ mit $\dot{\mathfrak{x}}^2 > 0$ und normieren den Parameter s durch die Forderung $\mathfrak{x}'^2 = 1$, führen wir ferner $\mathfrak{x}\mathfrak{x}'' = \mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{r}$ als begleitende Vektoren ein, so gilt für sie wieder die Tafel (45), und wir können über die Drehung in der $\mathfrak{q}\mathfrak{r}$ -Ebene noch verfügen. Weiter gilt

⁷⁾ Bis auf $\bar{\mathfrak{q}} = -\mathfrak{q}$, $\bar{\mathfrak{r}} = -\mathfrak{r}$.

$$(33) \quad \begin{array}{c|cccc} & \xi' & p & q & r \\ \hline \xi' & 0 & R & 0 & 0 \\ p & -R & 0 & A & B \\ q & 0 & -A & 0 & C \\ r & 0 & -B & -C & 0, \end{array}$$

wo R, A, B, C durch die Tafel definiert sind. Die Ableitungsgleichungen für die Kugelschar lauten daher

$$(34) \quad \begin{aligned} \xi'' &= R p, & p' &= -R \xi' + A q - B r, \\ q' &= -A p - C r, & r' &= -B p - C q. \end{aligned}$$

Von den hierin auftretenden vier Invarianten sind aber nur drei wesentlich, wir können durch geeignete Festlegung der Drehung der qr -Ebene etwa erreichen, daß $B = -A - 1$. Dann haben die Ableitungsgleichungen (30) und (34) dieselbe Form, und durch Vergleichen der Koeffizienten folgt

$$(35) \quad R = R, \quad S = -C R, \quad T = \frac{2A + C^2 + 1}{2}.$$

Wenn also eine W -Kugelschar gegeben ist, so können ihre Ableitungsgleichungen auf die Form (34) mit $B = -A - 1$ gebracht werden, und daraus ergeben sich eindeutig die Invarianten R, S, T des W -Streifens. Daß umgekehrt mit jedem W -Streifen eine W -Kugelschar verbunden ist, folgt durch Umkehrung der Schlüsse; man kann es auch aus L. VIII, § 5 ablesen.

(Eingegangen am 22. Mai 1927.)

A Method of Applying Tensor Analysis to the Study of Rectilinear Congruences¹⁾

by

M. M. Slotnick of Harvard University, Cambridge, Mass.

1. By means of Study's "Übertragungsprinzip"²⁾, the straight line of a Euclidean three-space is represented as a special type of point — the so-called "dual point" — on the unit sphere. A line A is determined by its direction cosines a : (a^1, a^2, a^3) , and by the vector $\bar{a}$: $(\bar{a}^1, \bar{a}^2, \bar{a}^3)$ representing the moment of a unit vector along A about the origin of coordinates. Accordingly, the fundamental relations here are:

$$(1.1) \quad (a|a) = 1^3$$

and

$$(1.2) \quad (a|\bar{a}) = 0.$$

The coordinates of A are written as the "dual vector"

$$(1.3) \quad A = a + \varepsilon \bar{a},$$

in which the unit ε obeys the law

$$(1.4) \quad \varepsilon^2 = 0.$$

As a result

$$(1.5) \quad (A|A) = (a|a) + 2\varepsilon(a|\bar{a}) = 1,$$

by virtue of (1.1), (1.2) and (1.4). Hence the *point* with the "dual coordinates" A lies on the unit sphere: $(A|A) = 1$.

¹⁾ The work and results here developed were suggested by Prof. W. Blaschke, to whom the writer wishes to express his grateful thanks.

²⁾ Cf. E. Study, *Geometrie der Dynamen* (Leipzig 1903), § 23. Also W. Blaschke, *Diff. Geom.* 1 (Berlin 1921), pp. 190 ff.

³⁾ The inner product of two vectors a and b is represented by $(a|b)$; i. e., $(a|b) = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3$.

It is to be noted that the point x lies on the line A if and only if

$$(1.6) \quad \widetilde{x a} = \bar{a}.^4)$$

2. In our study we shall exclude cylindric congruences; that is, congruences whose spherical representation is a curve or point, and devote ourselves to the general case only.

Let $m: (m^1, m^2, m^3)$ be the coordinates of the middle point of the line A of a congruence. The coordinates of the line are then

$$(2.1) \quad A = a + \varepsilon \widetilde{m a},$$

where a and m are functions of two independent parameters u^1, u^2 . The derivative of (2.1) with respect to u^i is written

$$(2.2) \quad A_i = a_i + \varepsilon (\widetilde{m_i a} + \widetilde{m a_i}).$$

Consider the dual tensor

$$(2.3) \quad G_{ik} = (A_i | A_k).$$

If this is written in the form

$$(2.4) \quad G_{ik} = g_{ik} + \varepsilon \bar{g}_{ik},$$

we have

$$(2.5) \quad g_{ik} = (a_i | a_k)$$

and

$$(2.6) \quad \bar{g}_{ik} = (m_i a a_k) + (m_k a a_i).$$

If m_i be expressed as a linear combination of the vectors a , $\frac{\partial a}{\partial u^1}, \frac{\partial a}{\partial u^2}$; i. e.,

$$(2.7) \quad m_i = p_i a + q_i^l a_l,^5)$$

equation (2.6) becomes

$$(2.8) \quad \bar{g}_{ik} = q_i^l e_{kl} + q_k^l e_{il},$$

where

$$(2.9) \quad e_{ij} = (a_i a_j a).$$

⁴⁾ The outer product of two vectors a and b is represented by $\widetilde{a b}$. If, then, c is a third vector, $(\widetilde{a b} | c) = (a b c)$, the last term being the determinant of the three vectors.

⁵⁾ The tensor notation used here is that of W. Blaschke, *Diff. Geom.* 2, pp. 142 ff. The index l being both a superscript and a subscript is a "dummy" index and indicates that the term is to be summed for $l = 1, 2$.

3. The coordinates of the focal points of A are of the form $m \pm ra$. Hence

$$(3.1) \quad (m \pm ra)_i (m \pm ra)_k a = 0.$$

By virtue of (2.7) and (2.9) this determinant becomes

$$(3.2) \quad q_i^l q_k^s e_{ls} \pm r(q_i^l e_{lk} + q_k^s e_{is}) + r^2 e_{ik} = 0.$$

This yields the two equations:

$$(3.3) \quad q_i^l e_{lk} + q_k^s e_{is} = 0$$

and

$$(3.4) \quad r^2 = \frac{1}{2} q_i^l q_k^s e_{ls} e^{ki}. {}^6$$

Because of (3.3), equation (2.8) becomes

$$(3.5) \quad \bar{g}_{ik} = 2q_i^l e_{kl};$$

that is to say,

$$(3.6) \quad q_i^l = \frac{1}{2} \bar{g}_{ik} e^{kl}.$$

4. Using (2.7), equation (2.2) assumes the form

$$(4.1) \quad A_i = a_i + \varepsilon(q_i^l \widetilde{a_l a} + \widetilde{m a_i}).$$

The tensor g_{ik} is from now on to be considered as the fundamental tensor, and covariant differentiation will be with respect to it.

The last equation, when differentiated covariantly, yields

$$(4.2) \quad A_{ik} = -g_{ik} a + \varepsilon[(q_{i,k}^l - p_k \delta_i^l) \widetilde{a_l a} - \bar{g}_{ik} a - g_{ik} \widetilde{m a}]. {}^7$$

Inasmuch as this expression must remain unaltered when i and k are interchanged and the tensors g_{ik} and $\bar{g}_{ik}$ are symmetric, we have

$$(4.3) \quad q_{i,k}^l - p_k \delta_i^l = q_{k,i}^l - p_i \delta_k^l.$$

This result is of importance only when $i \neq k$. In this case, (3.6) yields

$$(4.4) \quad q_1^1 = -q_2^2;$$

and, setting $l = k$ in (4.3), we are led to the result

$$(4.5) \quad p_i = q_{i,k}^k.$$

⁶) e^{ij} is the tensor conjugate to e_{ij} .

⁷) Since $(a|a) = 1$, $a_{i,k} = -g_{ik} a$. Here, also, $\delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j, \\ 0 & \text{if } i \neq j. \end{cases}$

If (3.6) is differentiated covariantly, the result is

$$(4.6) \quad q_{i,j}^s = \frac{1}{2} \bar{g}_{ik,j} e^{ks}.$$

Hence (4.5) can also be written

$$(4.7) \quad p_i = \frac{1}{2} \bar{g}_{ik,s} e^{sk}.$$

5. If A_{iks} indicate the covariant derivative of (4.2), the condition of integrability is

$$(5.1) \quad A_{iks} - A_{isk} = r_{im,sk} A^m,$$

where $r_{im,sk}$ is the Riemannian symbol of the first kind formed for g_{ik} ; and

$$(5.2) \quad A^m = g^{ml} A_l.$$

The identity

$$(5.3) \quad e_{im} e_{sk} = g_{is} g_{mk} - g_{ik} g_{ms}$$

is obtained from (1.1), (2.5) and (2.9). This may be written

$$(5.4) \quad e_{ih} g^{hs} = g_{ih} e^{hs}.$$

Since the curvature of $g_{ik} du^i du^k$ is unity, the right-hand side of (5.3) is equal to $r_{im,sk}^{10}$. Consequently, (5.1) becomes

$$(5.5) \quad A_{iks} - A_{isk} = e_{im} e_{sk} A^m,$$

which may be written

$$(5.6) \quad \begin{aligned} A_{i; s} e^{ks} &= e_{hi} A^h \\ &= e_{hi} g^{hl} A_l \\ &= e_{hi} g^{hl} [a_l + \varepsilon(\widetilde{ma})_l] \\ &= -g_{hi} e^{hl} [a_l + \varepsilon(\widetilde{ma})_l]. \end{aligned}$$

The last result follows from (5.4).

We return now to (4.2), which becomes

$$(5.7) \quad A_{ik} = -g_{ik} a + \varepsilon \left[\frac{1}{2} (\bar{g}_{ir,k} e^{rl} + \bar{g}_{kr,t} e^{rt} \delta_i^l) \widetilde{a}_l \widetilde{a} - \bar{g}_{ik} a - g_{ik} \widetilde{ma} \right]$$

by virtue of (4.6) and (4.7). From this result we get

$$(5.8) \quad \begin{aligned} A_{iks} e^{ks} &= -g_{ik} e^{ks} a_s + \varepsilon \left[\frac{1}{2} e^{ks} (\bar{g}_{ir,ks} e^{rl} + \bar{g}_{kr,ts} e^{rt} \delta_i^l) \widetilde{a}_l \widetilde{a} \right. \\ &\quad \left. - \bar{g}_{ik} e^{ks} a_s - g_{ik} e^{ks} (\widetilde{ma})_s \right]. \end{aligned}$$

⁹) Since g_{ik} is the fundamental tensor, the tensors g_{ik} , g^{ik} , e_{ik} , e^{ik} , δ_i^j behave as constants in covariant differentiation.

⁹) Cf. W. Blaschke, *Diff. Geom.* 2, p. 151, (102).

¹⁰) Loc. cit. p. 152, (105)*.

From (5.6) and (5.8) we have

$$(5.9) \quad e^{ks} (\bar{g}_{ir, ks} e^{rl} + \bar{g}_{kr, ts} e^{rt} \delta_i^l) \widetilde{a_t a} = 2 \bar{g}_{ik} e^{ks} a_s.$$

The inner product of both sides of this equation with a_j is

$$(5.10) \quad \begin{aligned} e^{ks} (\bar{g}_{ij, ks} - \bar{g}_{ki, js} + \bar{g}_{jk, is}) &= 2 \bar{g}_{ik} e^{ks} g_{js} \\ &= 4 q_i^s g_{js} \\ &= 4 q_{ij}, \end{aligned}$$

where

$$(5.11) \quad q_i^s g_{ks} = q_{ik}.$$

6. Since $\bar{g}_{ik}$ is a symmetric tensor, the term $e^{ks} e^{ij} \bar{g}_{ij, ks}$ vanishes identically. Hence (5.10) yields

$$(6.1) \quad e^{ks} e^{ij} \bar{g}_{kj, is} = 2 q_{ij} e^{ij}.$$

Because of (4.7) this equation can be written

$$(6.2) \quad e^{ks} (p_{ks} - q_{ks}) = 0.$$

The tensor q_{ks} is symmetric when and only when p_{ks} is symmetric; that is, when and only when the congruence is a normal one.

This last fact can readily be shown in the following manner. A congruence is normal if and only if a function λ exists such that

$$(6.3) \quad ((m + \lambda a)_i | a) = 0.$$

Using (2.7), then, $p_i = -\lambda_i$; i. e., p_i is a gradient and p_{ij} must be symmetric.

Returning to (6.2), we have the fact that a congruence is normal if and only if

$$(6.4) \quad e^{ks} p_{ks} = 0, \quad \text{or} \quad e^{ks} q_{ks} = 0.$$

7. Consider now the envelope of the plane normal to A and passing through the middle point m . The point x tracing this envelope must satisfy the equations

$$(7.1) \quad (x - m | a) = 0$$

and

$$(7.2) \quad (\overline{x - m} | a_i) = (m_i | a) = p_i, \quad (\text{cf. (2.7)}).$$

The solution here is

$$(7.3) \quad x = m + p_i a^i,$$

where

$$(7.4) \quad a^l = g^{hl} a_h.$$

The covariant derivative of (7.3) is

$$(7.5) \quad x_i = (p_{il} + q_{il}) a^l.$$

8. The parameter of distribution of a ruled surface of the congruence is

$$(8.1) \quad d = \frac{1}{2} \frac{\bar{g}_{ik} du^i du^k}{g_{ik} du^i du^k},^{11)}$$

or

$$(8.2) \quad d = - \frac{s_{ik} du^i du^k}{g_{ik} du^i du^k},$$

where (cf. (3.5))

$$(8.3) \quad s_{ik} = q_i^l e_{lk}.$$

For an isotropic congruence we have therefore

$$(8.4) \quad s_{ik} = \lambda g_{ik}.$$

The developables of the congruence are defined by

$$(8.5) \quad s_{ik} du^i du^k = 0;^{12)}$$

and the principal surfaces, that is the ruled surfaces of the congruence for which d is an extremum, by

$$(8.6) \quad q_{ik} du^i du^k = 0.^{13)}$$

9. In the following sections the results obtained are applied to a few problems.

When the developables of a congruence are parametric (cf. § 8), we find, from (4.5), (3.4) and (3.6) that

$$(9.1) \quad p_1 = -r_1 - 2r \Gamma_{12}^2, \quad p_2 = r_2 + 2r \Gamma_{12}^1.^{14)}$$

Suppose that the tensor G_{ik} is of the Tchebycheff form; i. e., $G_{ii} = 1$. The parametric surfaces are then the developables, and the Christoffel symbols of (9.1) vanish. Consequently we have for the focal surfaces $m \pm ra$:

$$(9.2) \quad \begin{aligned} (m + ra)_1 &= 2ra_1, & (m - ra)_1 &= -2r_1 a, \\ (m + ra)_2 &= 2r_2 a, & (m - ra)_2 &= -2ra_2. \end{aligned}$$

Hence

$$(9.3) \quad ((m \pm ra)_1 | (m \pm ra)_2) = 0;$$

¹¹⁾ Cf. Blaschke, Diff. Geom. 1, p. 202, (81).

¹²⁾ Ibid. (91).

¹³⁾ Ibid. (86).

¹⁴⁾ Γ_{jk}^i is the Christoffel symbol of the second kind formed for g_{ik} . Also $r_i = \frac{\partial r}{\partial u^i}$.

i. e., the parametric curves are orthogonal. Moreover, since

$$(9.4) \quad (m + ra)_{12} = 2r_{12}a + 2r_2a_1, \quad (m - ra)_{12} = -2r_{12}a - 2r_1a_2$$

these curves form a conjugate system. Thus, if a congruence is such that the tensor G_{ik} can be made to assume the Tchebycheff form, its developables meet the focal surfaces in their lines of curvature¹⁵).

10. A congruence of Bianchi¹⁶) is one for which r and $e^{ih}q_{ih}$ are constant. We shall show that the focal surfaces of such a congruence have constant Gaussian curvature.

Using the same parameters as in the preceding section, the following equations are obtained for the focal surface $(m + ra)$:

$$(10.1) \quad (m + ra)_1 = p_1a + 2ra_1, \quad (m + ra)_2 = p_2a.$$

Hence, from these and the fact that, from (9.1), $p_2 = 2r\Gamma_{12}^1$, we have

$$(10.2) \quad K = \frac{d^2\Gamma_{11}^2}{4r^2g_{11}^2\Gamma_{12}^1}.^{17)}$$

The condition that $e^{ih}q_{ih}$ be constant reduces to

$$(10.3) \quad \frac{g_{12}}{e_{12}} = \frac{g_{12}}{d} = \text{constant}.$$

Thus

$$(10.4) \quad g_{22}\Gamma_{11}^2 = -g_{11}\Gamma_{12}^1$$

and

$$(10.5) \quad K = -\frac{d^2}{4r^2g_{11}g_{22}}.$$

By hypothesis r is constant. From (10.3) we note that $\frac{d^2}{g_{11}g_{22}}$ is also constant, and hence $K = \text{constant}$.

The same result can be established similarly for the other focal surface.

11. We now pass on to a problem set and solved by A. Schur¹⁸). It is required to find when the focal surfaces of a congruence are isometrically mapped upon one another, corresponding points being those joined by the lines of the congruence.

From (2.7) we have for the focal surface $(m + ra)$:

$$(11.1) \quad (m + ra)_i = (p_i + r_i)a + (q_i^l + r\delta_i^l)a_l.$$

Hence the metric tensor for this surface is

$$(11.2) \quad g_{ik} = (p_ip_k + r_ir_k) + (q_i^lq_k^s + r^2g_{ik}) + (p_ir_k + p_kr_i) + r(q_{ik} + q_{ki}).$$

¹⁵) Cf. Guichard, Annales de l'école norm. sup. (3), 6 (1889), p. 346.

¹⁶) Cf. L. Bianchi, Annali di matematica (2), 15 (1887).

¹⁷) $d^2 = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$.

¹⁸) Cf. A. Schur, Math. Zeitschr. 19 (1924), p. 114.

For our problem, this tensor must remain unaltered when r is replaced by $-r$; that is

$$(11.3) \quad p_i r_k + p_k r_i + r(q_{ik} + q_{ki}) = 0.$$

Let the developables be the parametric surfaces of our congruence. The last equation becomes the following three:

$$(11.4) \quad \begin{aligned} \text{I. } & p_1 r_1 + r^2 g_{11} = 0, \\ \text{II. } & p_1 r_2 + p_2 r_1 = 0, \\ \text{III. } & p_2 r_2 - r^2 g_{22} = 0. \end{aligned}$$

Equation (11.2) yields

$$(11.5) \quad E = p_1^2 + r_1^2 + 2r^2 g_{11}, \quad F = p_1 p_2 + r_1 r_2, \quad G = p_2^2 + r_2^2 + 2r^2 g_{22}.$$

By virtue of (11.4) we have:

$$(11.6) \quad E = (p_1 - r_1)^2, \quad G = (p_2 + r_2)^2.$$

The following equations are also found:

$$(11.7) \quad \begin{aligned} (m + ra)_1 &= (p_1 + r_1)a + 2ra_1, & (m - ra)_1 &= (p_1 - r_1)a, \\ (m + ra)_2 &= (p_2 + r_2)a, & (m - ra)_2 &= (p_2 - r_2)a - 2ra_2, \\ (m + ra)_{12} &= (p_{21} + r_{21})a + (p_2 + r_2)a_1 \\ &= \left(\frac{p_2 + r_2}{2r}\right)(m + ra)_1 + \left(\frac{p_{21} + r_{21}}{p_2 + r_2} - \frac{p_1 + r_1}{2r}\right)(m + ra)_2, \\ (m - ra)_{12} &= (p_{12} - r_{12})a + (p_1 - r_1)a_2 \\ &= \left(\frac{p_{12} - r_{12}}{p_1 - r_1} + \frac{p_2 - r_2}{2r}\right)(m - ra)_1 + \left(\frac{p_1 - r_1}{-2r}\right)(m - ra)_2. \end{aligned}$$

Corresponding coefficients of $(m \pm ra)_i$ in the last pair of equations must be equal since these are functions of E, F, G only. On equating them, we find that the resulting equations can be integrated and we obtain

$$(11.8) \quad p_1 - r_1 = 2r\varphi(u^1), \quad p_2 + r_2 = -2r\psi(u^2),$$

where φ is an arbitrary function of u^1 alone and ψ of u^2 alone.

Hence equations (11.6) can now be written

$$(11.9) \quad E = 4r^2\varphi^2, \quad G = 4r^2\psi^2.$$

If, then, new parameters, $\bar{u}^1, \bar{u}^2$, are chosen such that

$$(11.10) \quad d\bar{u}^1 = \varphi(u^1)du^1, \quad d\bar{u}^2 = \psi(u^2)du^2$$

and the bars are dropped we obtain Schur's result¹⁹⁾:

$$(11.11) \quad E = G = 4r^2.$$

¹⁹⁾ Loc. cit. p. 115.

Also, from (11.4II):

$$(11.12) \quad \frac{p_1 - r_1}{r_1} = - \frac{p_2 + r_2}{r_2},$$

so that in the new parameters

$$(11.13) \quad r_1 = r_2 = r';$$

that is $r = r(u^1 + u^2)$.

Moreover we also have

$$(11.14) \quad F = -4r^2 - 4rr'.$$

Following Schur, new parameters

$$(11.15) \quad \hat{u}^1 = u^1 + u^2, \quad \hat{u}^2 = u^1 - u^2,$$

are introduced. We shall indicate the quantities in these parameters by circumflexes. The following results are readily obtained:

$$(11.16) \quad \begin{array}{ll} \text{I.} & \hat{r}_1 = r', \quad \hat{r}_2 = 0, \\ \text{II.} & \hat{p}_1 = 0, \quad \hat{p}_2 = 2r + r' = 2\hat{r} + \hat{r}_1, \\ \text{III.} & \hat{q}_1^1 = 0, \quad \hat{q}_2^2 = 0, \\ \text{IV.} & \hat{q}_1^2 = \hat{r}, \quad q_2^1 = \hat{r}, \\ \text{V.} & \hat{g}_{12} = \hat{g}_{12} = 0. \end{array}$$

In the problem of Schur the parametric surfaces for these parameters are the principal surfaces of the congruence.

Mathematisches Seminar der Hamburger Universität, den 9. Juni 1927.

(Eingegangen am 17. Juni 1927.)

Grundlagen einer Theorie der algebraischen Funktionen mehrerer Veränderlichen.

Von

Werner Schmeidler in Breslau.

Edmund Landau zum 50. Geburtstag gewidmet.

Einleitung.

In Ausführung eines vom Verfasser auf der Tagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung am 20. September 1926 in Düsseldorf gehaltenen Vortrages¹⁾ soll im folgenden die Theorie der algebraischen Funktionen mehrerer Veränderlichen in ihren formalen Grundlagen in ähnlicher Weise aufgebaut werden, wie dies für eine Variable Dedekind und Weber in einer berühmten Abhandlung²⁾ getan haben.

In erster Linie handelt es sich dabei um eine Theorie der Ideale aus ganzen Größen eines Körpers $\mathfrak{K}$ von algebraischen Funktionen mehrerer $(m - 1)$ unabhängiger Veränderlichen, insbesondere um die Theorie ihrer Normen und Elementarteilerformen (§ 1). Diese läßt sich ganz ähnlich entwickeln wie die entsprechende Theorie für Polynomideale von Hentzelt-Noether³⁾; der Beweisgang ist ein anderer, bedeutet aber auch für den Fall der Polynomideale, der mit umfaßt wird, eine Abkürzung. Von Bedeutung ist ferner die Bezugnahme auf die allgemeine Idealtheorie in Ringbereichen von E. Noether⁴⁾, sowie die Bemerkung, daß die Adjunktion von $m - 2$ unabhängigen Veränderlichen zum Grundbereich den Körper in einen solchen von algebraischen Funktionen einer Veränderlichen verwandelt, dessen Ideale als Potenzprodukte von Primidealen dargestellt

¹⁾ Vgl. Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **36** (1927), S. 3—4.

²⁾ Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen, Journal für die reine und angewandte Mathematik **92** (1882), S. 181—190. Im folgenden zitiert mit D.-W.

³⁾ Math. Annalen **88** (1922), S. 53—79. Zitiert mit H.-N.

⁴⁾ Math. Annalen **83** (1921), S. 24—66. Vgl. auch von derselben Verfasserin Eliminationstheorie und allgemeine Idealtheorie, Math. Annalen **90** (1923), S. 229—261.

werden können. Die hauptsächlichsten Schwierigkeiten gegenüber dem Falle einer unabhängigen Veränderlichen bringt der Umstand mit sich, daß im allgemeinen keine n -gliedrige Basis für die ganzen Größen des Körpers existiert, wenn n den Grad des Körpers bedeutet. Dieser Umstand macht die begriffliche Einführung der speziellen Bildungen notwendig, die bei Dedekind-Weber mit Hilfe der Basis definiert sind, also insbesondere des komplementären Moduls eines Ideals, ferner des Verzweigungsideals $\mathfrak{z}$ und des Führerideals $\mathfrak{a}$ (bei D.-W. mit k bezeichnet)⁵⁾ (§ 2). Bemerkenswert erscheint vor allem das Resultat, daß $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{a}$ „ungemischte“ Ideale werden, und im Zusammenhange damit die Übertragung der Kronecker-Dedekindschen Zerlegung der Gleichungsdiskriminante in einen nur von der Wahl des Körpers der unabhängigen Veränderlichen abhängigen („wesentlichen“) Diskriminantenteiler $N(\mathfrak{z})$ und in einen auch von der Wahl der abhängigen Veränderlichen abhängenden („außerwesentlichen“) Diskriminantenteiler $N(\mathfrak{a})$ (Formel (6a), § 2), sowie die in (9) § 2 enthaltene Beziehung zwischen $\mathfrak{z}$ und dem größten gemeinsamen Teiler $\mathfrak{z}'$ aller Hauptideale $\mathfrak{o} \frac{\partial G}{\partial \zeta}$, wobei $G(\zeta) = 0$ die irreduzible Gleichung für die ganze Größe ζ bedeutet; diese Beziehung geht für $m = 2$ in die bekannte Gleichung $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}'$ über. In § 3 endlich wird die invariante Formulierung des Begriffes der Riemannschen Fläche für Funktionen mehrerer Veränderlicher gegeben.

§ 1.

Norm und Elementarteilerform eines Ideals aus $\mathfrak{K}$.

1. Es seien $y_2, \dots, y_m$ unabhängige Veränderliche und es sei x_1 eine ganze algebraische Funktion von $y_2, \dots, y_m$ die durch die Gleichung $G(x_1, y_2, \dots, y_m) = 0$ definiert ist, deren linke Seite ein in allen Variablen reguläres, irreduzibles Polynom vom Grade n sei, dessen Koeffizienten einem vollkommenen Körper P angehören. Die Gesamtheit $P(x_1, y_2, \dots, y_m)$ aller rationalen Funktionen von $x_1, y_2, \dots, y_m$ mit Koeffizienten aus P bildet einen Körper $\mathfrak{K}(y)$. Eine Größe $\omega = \omega(y)$ des Körpers heißt ganz in $\mathfrak{K}(y)$, wenn sie einer Gleichung

$$\omega^\mu + a_1^{(2)}(y) \omega^{\mu-1} + \dots + a_\mu^{(2)}(y) = 0$$

genügt, wo $a_1^{(2)}, \dots, a_\mu^{(2)}$ Polynome in $y_2, \dots, y_m$ sind; bekanntlich genügt jedes ganze ω einer solchen Gleichung mit $\mu = n$. Ein Ideal in $\mathfrak{K}(y)$ ist ein System aus ganzen Größen in $\mathfrak{K}(y)$, in dem neben α_1 und α_2

⁵⁾ In meinem Bericht (Anm. ¹⁾) ist dieses Ideal als „adjungiertes“ Ideal bezeichnet worden. Ich bevorzuge neuerdings die ursprünglich von Dedekind für die analoge Bildung bei Zahlkörpern geprägte Bezeichnung als „Führer“ eines gewissen Ringes von Polynomen.

auch $\alpha_1 - \alpha_2$ und neben α auch $\omega\alpha$ bei beliebigem ganzen ω enthalten ist. Wir bezeichnen Ideale mit kleinen deutschen Buchstaben $\mathfrak{a}(y)$, $\mathfrak{b}(y)$, $\mathfrak{c}(y)$, ... Unter einem Modul in $\mathfrak{K}(y)$ versteht man ein System von Größen aus $\mathfrak{K}(y)$, in dem neben α_1 und α_2 auch $\alpha_1 - \alpha_2$ und neben α auch $a^{(2)}(y)\alpha$ enthalten ist, wenn $a^{(2)}(y)$ ein beliebiges Polynom in $y_2, \dots, y_n$ bedeutet.

Wir unterwerfen nunmehr die unabhängigen Variablen einer unbestimmten linearen Transformation

$$(1) \quad y_i = \sum_{k=2}^m u_{ik} x_k \quad (i = 2, \dots, m),$$

und adjungieren die Koeffizienten dieser Transformation dem Grundkörper P . Der entstehende Erweiterungskörper werde mit $P(u)$ bezeichnet. In $P(u)$ sei

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$$

die irreduzible Gleichung n -ten Grades für x_1 . Wir bezeichnen den aus $\mathfrak{K}(y)$ bei dieser Transformation entstehenden Körper über dem Grundbereich $P(u)$ mit $P(u; x_1, \dots, x_m) = \mathfrak{K}$. Die Ideale von $\mathfrak{K}$, die dabei aus den Idealen des Körpers $\mathfrak{K}(y)$ hervorgehen, heißen transformierte Ideale in $\mathfrak{K}$; wir bezeichnen sie mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... Polynome von $x_i, \dots, x_m$ mit Koeffizienten aus $P(u)$ bezeichnen wir mit $F^{(i)}$, $a^{(i)}$, $b^{(i)}$, $c^{(i)}$, ... ($i = 2, \dots, m$).

2. Es sei $\mathfrak{a}$ ein transformiertes Ideal in $\mathfrak{K}$. Dann verstehen wir unter dem Grundideal $\mathfrak{g}_{i-1}$ von $\mathfrak{a}$ die Gesamtheit aller ganzen Größen γ in $\mathfrak{K}$, für die ein Polynom $b^{(i)}(x_i, \dots, x_m)$ existiert, so daß

$$(2) \quad b^{(i)} \cdot \gamma \equiv 0(\mathfrak{a}) \quad (i = 2, \dots, m)$$

ist. Wir setzen weiterhin $\mathfrak{g}_m = \mathfrak{a}$. Offenbar ist $\mathfrak{g}_{i-1}$ ein Teiler von $\mathfrak{g}_i$, da $b^{(i+1)}$ zugleich ein $b^{(i)}$ ist. Ferner ist $\mathfrak{g}_1$ gleich der Gesamtheit $\mathfrak{o}$ aller ganzen Größen aus $\mathfrak{K}$. Adjungieren wir nämlich $x_2, \dots, x_m$ zum Grundbereiche $P(u)$, so geht $\mathfrak{K}$ in den Körper $\mathfrak{K}_2$ aller rationalen Funktionen von x_1 und x_2 mit Koeffizienten aus $P(u; x_3, \dots, x_m)$ über, also in einen Körper einer unabhängigen Veränderlichen. Alle ganzen Größen aus $\mathfrak{K}$ sind auch ganz in $\mathfrak{K}_2$, und umgekehrt gibt es zu jeder ganzen Größe ω in $\mathfrak{K}_2$ ein Polynom $b^{(3)}$, so daß $b^{(3)} \cdot \omega$ ganz in $\mathfrak{K}$ ist. Betrachtet man nun die Norm des aus $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{K}_2$ entstehenden Ideales $\mathfrak{a}_2$, also ein Polynom von x_2 mit Koeffizienten aus $P(u; x_3, \dots, x_m)$, das zu $\mathfrak{a}_2$ gehört, so ergibt sich die Existenz eines Polynoms $b^{(2)}$, das zu $\mathfrak{a}$ gehört, und demnach ist $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{o}$.

Wir behaupten ferner, daß die Grundideale $\mathfrak{g}_{i-1}$ transformierte Ideale in $\mathfrak{K}$ sind. Der Beweis verläuft ganz analog wie im Falle der Polynomideale (vgl. H.-N. S. 63).

Es sei in der Tat $\alpha_1(y), \dots, \alpha_\mu(y)$ eine Basis des Ideals $\alpha(y)$; die Einführung der Transformation (1) ergibt hieraus eine Basis $\alpha_1, \dots, \alpha_\mu$ für α . Jedes α in α ist daher in der Form $\alpha = a_1^{(2)}\alpha_1 + \dots + a_\mu^{(2)}\alpha_\mu$ darstellbar und jedes $a_\lambda^{(2)}$ ist von der Gestalt $a_\lambda^{(2)} = \sum_{\sigma} p_{\sigma}(u) b_{\sigma\lambda}^{(2)}(y)$ mit rationalen Funktionen $p_{\sigma}(u)$ von den unbestimmten u_{i_k} . Da diese Funktionen durch Multiplikation mit einem geeigneten Faktor aus $P(u)$ zu Polynomen werden, so können sie ohne Beschränkung der Allgemeinheit als Potenzprodukte der u_{i_k} vorausgesetzt werden. Für transformierte Ideale α gilt also, daß aus $\sum_{\sigma} p_{\sigma}(u) \eta_{\sigma}(y) \equiv 0(\alpha)$ vermöge (1) mit Potenzprodukten $p_{\sigma}(u_i)$ die Zugehörigkeit von $\eta_{\sigma}(y)$ zu α folgt, und umgekehrt ist jedes derartige Ideal transformiert.

Es sei nun $\gamma = \sum_{\lambda} c_{\lambda}^{(2)} \omega_{\lambda}$, wobei ω_{λ} eine Basis der ganzen Größen in $\mathfrak{R}(y)$, die also vermöge (1) in eine Basis von $\mathfrak{o}$ in $\mathfrak{R}$ übergeht, durchläuft, eine beliebige Größe aus $\mathfrak{g}_{i-1}$, und es sei vermöge (1) — wiederum ohne Beschränkung der Allgemeinheit —, $c_{\lambda}^{(2)} = \sum_{\lambda} p_{\sigma}(u) d_{\sigma\lambda}^{(2)}(y)$ mit Potenzprodukten $p_{\sigma}(u)$ und Polynomen $d_{\sigma\lambda}^{(2)}(y)$ von $y_2, \dots, y_m$ mit Koeffizienten in P . Ferner setzen wir $b^{(i)}(x_i, \dots, x_m) = \sum_{\tau} q_{\tau}(u) f_{\tau}^{(2)}(y)$ in analogem Sinne. Dann gilt wegen (2):

$$\sum_{\tau} q_{\tau}(u) f_{\tau}^{(2)}(y) \cdot \sum_{\sigma, \lambda} p_{\sigma}(u) d_{\sigma\lambda}^{(2)}(y) \omega_{\lambda} \equiv 0(\alpha).$$

Linkerhand steht ein Produkt zweier Polynome in den u_{i_k} , deren Koeffizienten die Größen $f_{\tau}^{(2)}(y)$ und $\sum_{\lambda} d_{\sigma\lambda}^{(2)}(y) \omega_{\lambda}$ sind. Das Produkt dieser beiden Polynome gehört zu (α) ; also gehören die Koeffizienten der Potenzprodukte des Produktpolynoms vermöge (1) ebenfalls zu α , da α transformiert ist. Vermöge des Dedekind-Mertens-Kroneckerschen Satzes⁶⁾ schließt man hieraus, daß für einen geeigneten Exponenten q

$$\left\{ \sum_{\tau} q_{\tau}(u) f_{\tau}^{(2)}(y) \right\}^q \cdot \sum_{\lambda} d_{\sigma\lambda}^{(2)}(y) \omega_{\lambda} \equiv 0(\alpha)$$

gilt. Daraus folgt, daß für die in der Darstellung von $\gamma = \sum_{\sigma} p_{\sigma}(u) \eta_{\sigma}$ auftretenden Größen $\eta_{\sigma} = \sum_{\lambda} d_{\sigma\lambda}^{(2)}(y) \omega_{\lambda}$ die Existenz von Polynomen $c^{(i)} = b^{(i)q}$ gilt, für die vermöge der Transformation (1) das Produkt $c^{(i)} \cdot \eta_{\sigma} \equiv 0(\alpha)$, also $\eta_{\sigma} \equiv 0(\mathfrak{g}_{i-1})$ ist. Damit ist $\mathfrak{g}_{i-1}$ als transformiertes Ideal erkannt.

3. Da das Grundideal $\mathfrak{g}_{i-1}$ eine endliche Basis besitzt, durch die sich mit Polynomen in $x_2, \dots, x_m$ über $P(u)$ als Koeffizienten jedes μ einer Elemente linear darstellen läßt, so gibt es ein $B^{(i)}$, derart, daß für jedes $\gamma \equiv 0(\mathfrak{g}_{i-1})$ die Kongruenz $B^{(i)} \cdot \gamma \equiv 0(\alpha)$ gilt. Wir betrachten nun das

⁶⁾ Vgl. das Zitat und die entsprechende Schlußweise in H.-N., S. 63.

4. Wir fassen nun das System der Restklassen ins Auge, das von den Größen aus $g_{i-1} \bmod g_i$ im Körper $P(u; x_{i+1}, \dots, x_m)$ als Grundbereich erzeugt wird, und behaupten die Existenz einer endlichen Anzahl von Größen $\gamma_1, \dots, \gamma_\sigma$ aus g_{i-1} , so daß jedes $\gamma \equiv 0 (g_{i-1})$ in der Form

$$\gamma \equiv a_1 \gamma_1 + \dots + a_\sigma \gamma_\sigma (g_i)$$

dargestellt werden kann, wobei $a_1, \dots, a_\sigma$ Polynome von x_i mit Koeffizienten aus $P(u; x_{i+1}, \dots, x_m)$ bedeuten.

In der Tat gibt es wegen der Existenz einer Idealbasis für g_{i-1} endlich viele Größen dieses Ideals, durch die sich mit Polynomen von $x_2, \dots, x_i$ über $P(u; x_{i+1}, \dots, x_m)$ als Koeffizienten jedes γ aus g_{i-1} linear darstellen läßt. Es gilt nun für jedes transformierte Ideal der Satz, daß bei einer Vertauschung von x_i mit x_j und bei gleichzeitiger Vertauschung der unbestimmten $u_{1i}, \dots, u_{mi}$ mit $u_{1j}, \dots, u_{mj}$ jede Größe des Ideals wieder in eine solche übergeht. Angewandt auf das Polynom $E^{(i)}$ in (3) liefert dieser Satz die Existenz von Polynomen $F_j(x_j, x_{i+1}, \dots, x_m)$ ($j = 2, \dots, i-1$), die in x_j regulär sind und für die $F_j \cdot g_{i-1} \equiv 0 (g_i)$ gibt. Hiernach können in den Koeffizienten der obigen Idealbasis $\bmod g_i$ für jedes γ die Grade in bezug auf $x_2, \dots, x_{i-1}$ als beschränkt angenommen werden; die Produkte der Basisgrößen mit endlich vielen Potenzprodukten von $x_2, \dots, x_{i-1}$ liefern daher endlich viele Größen von der Eigenschaft, die in der Behauptung ausgesagt ist.

Nunmehr fassen wir den Modul aller Relationen von $\gamma_1, \dots, \gamma_\sigma \bmod g_i$, dessen Koeffizienten Polynome von x_i über $P(u; x_{i+1}, \dots, x_m)$ sind, ins Auge und wenden auf ihn in bekannter Weise die Elementarteilertheorie an, deren Resultate von der speziellen Wahl der Basis $\gamma_1, \dots, \gamma_\sigma$ unabhängig sind. Ist ϱ der Rang des Moduls, $e_1 \eta_1, \dots, e_\varrho \eta_\varrho$ eine Normalbasis, so wird der ϱ -te Elementarteiler wegen seiner Teilbarkeit durch alle vorhergehenden das Polynom niedrigsten Grades in x_i , dessen Produkt mit jedem $\gamma \equiv 0 (g_{i-1})$ zu g_i gehört, also bei passender Wahl eines Faktors aus dem Koeffizientenbereiche gleich der Elementarteilerform i -ter Stufe $E^{(i)}$. Das Produkt aller ϱ Elementarteiler wird als *Teilnorm i -ter Stufe* $N^{(i)}$ von α definiert. Sein Grad in x_i ist gleich der Anzahl der linear unabhängigen Restklassen von $g_{i-1} \bmod g_i$ über $P(u; x_{i+1}, \dots, x_m)$; denn $\eta_1, \dots, \eta_\varrho$ ist eine Basis von $g_{i-1} \bmod g_i$ und die Größen $x_i^{\lambda_1} \cdot \eta_1, \dots, x_i^{\lambda_\varrho} \cdot \eta_\varrho$ sind linear unabhängig $\bmod g_i$ in bezug auf den Koeffizientenbereich $P(u; x_{i+1}, \dots, x_m)$, falls λ_1 alle Exponenten von 0 inkl. bis zum Grade von e_1 in x_i exkl. durchläuft und Analoges für $\lambda_2, \dots, \lambda_\varrho$ gilt. Offenbar ist $N^{(i)}$ durch $E^{(i)}$ und eine Potenz von $E^{(i)}$ durch $N^{(i)}$ teilbar, da beide dieselben irreduziblen Faktoren enthalten. $N^{(i)}$ ist ferner ebenfalls regulär in x_i und Polynom

in $x_i, \dots, x_m$. Das Produkt $N(a) = N^{(2)} \dots N^{(m)}$ heißt die Norm von a . Es gilt wegen Nr. 3

$$N(a) \equiv 0(a).$$

5. Ist b ein Teiler von a und Norm (b) gleich Norm (a) , so ist b gleich a . In der Tat stimmen zunächst die Grundideale erster Stufe für a und b überein, da beide gleich $\mathfrak{o}$ sind. Die Übereinstimmung treffe für die Grundideale bis zur $(i-1)$ -ten Stufe einschließlich zu. Dann ist das System der Relationen von $g_{i-1} \bmod g_i$ für a ein Teilsystem des entsprechenden Systems für b , da das Grundideal g_i für b ein Teiler des entsprechenden Grundideals für a ist und g_{i-1} für beide dasselbe ist. Weil aber die Teilnormen, wie aus der Voraussetzung folgt, miteinander übereinstimmen, also die Anzahl der linear unabhängigen Restklassen in beiden Fällen dieselbe ist, so können auch die beiden Moduln der Relationen von $g_{i-1} \bmod g_i$, von denen der eine ein Teiler des anderen ist, nicht voneinander verschieden sein. Demnach ist auch das Grundideal i -ter Stufe für a und b dasselbe; und hieraus folgt schließlich auch die Übereinstimmung von a und b selbst.

Die Ideale $g_1, \dots, g_{i-1}$ sind die Grundideale für g_i ; denn aus $b^{(j)} \cdot \gamma \equiv 0(g_i)$ ($j \leq i$) folgt $b^{(j)} \cdot b^{(i+1)} \cdot \gamma \equiv 0(a)$; die Grundideale höherer Stufe von g_i stimmen alle mit g_i überein. Daher ist $N(g_i)$ gleich $N^{(2)} \dots N^{(i)}$.

6. Wir nehmen speziell an, daß $a = p$ ein *Primideal* ungleich $\mathfrak{o}$ sei; es soll also aus $\alpha\beta \equiv 0(p)$ folgen, daß mindestens eine der beiden ganzen Größen α oder β zu p gehört. Wegen Nr. 3 muß dann einer der Faktoren von E , etwa $E^{(i)}$, $\equiv 0(p)$ sein, und zwar sei i der erste Index, für den das zutrifft. Als dann ist notwendig $g_1 = g_2 = \dots = g_{i-1} = \mathfrak{o}$ und $N^{(2)} = \dots = N^{(i-1)} = E^{(2)} = \dots = E^{(i-1)} = 1$, während $p \neq \mathfrak{o}$, also $E^{(i)} \neq 1$ ist. Das Grundideal g_i ist $= p$, denn aus $b^{(i+1)} \cdot g_i \equiv 0(p)$ kann nicht folgen $b^{(i+1)} \equiv 0(p)$, weil dies $g_i = \mathfrak{o}$ und daher $N^{(i)} = 1$, also $E^{(i)} = 1$ nach sich zöge. Es ist also $g_i \equiv 0(p)$, also $g_i = p$ und $g_{i+1} = \dots = g_m = p$. Daher wird $E = E^{(i)}$ und $N(p) = N^{(i)}$. Die Zahl $m-i$, die Anzahl der algebraisch unabhängigen Variablen $x_{i+1}, \dots, x_m \bmod p$, heißt die *Mannigfaltigkeit des Primideals*. Vertauscht man x_i mit $x_2, \dots, x_{i-1}$ und nimmt die entsprechenden Vertauschungen der u_{ik} vor, so zeigt $E^{(i)} \equiv 0(p)$, daß auch $x_2, \dots, x_{i-1} \bmod p$ in demselben Grade von $x_{i+1}, \dots, x_m$ algebraisch abhängen wie x_i , und gleiches gilt von einer unbestimmten linearen Verbindung von $x_2, \dots, x_i$. Da $E^{(i)}$ irreduzibel ist, weil es sonst in einem echten Teiler von sich selbst enthalten wäre, so folgt hieraus, daß die Anzahl der in $P(u; x_{i+1}, \dots, x_m)$ linear unabhängigen, von allen Polynomen von $x_2, \dots, x_m$ in $P(u)$ erzeugten Restklassen $\bmod p$ gleich dem

Grade p von $E^{(i)}$ in x_i ist. Die Anzahl der in $P(u; x_{i+1}, \dots, x_m)$ linear unabhängigen, von allen ganzen Größen aus $\mathfrak{R}$ erzeugten Restklassen mod $\mathfrak{p}$ ist gleich dem Grade von $N^{(i)} = E^{(i)f}$, also gleich fp . Die Zahl f heißt der *Grad des Primideals* $\mathfrak{p}$; da alle ganzen Größen rationale Funktionen von $x_1, \dots, x_m$ sind und x_1 einer irreduziblen Gleichung $\leq n$ -ten Grades mit Koeffizienten genügt, die mod $\mathfrak{p}$ reduziert sind, so ist $1 \leq f \leq n$.

Die Gesamtheit aller Polynome von $x_2, \dots, x_m$, die zu $\mathfrak{p}$ gehören, bildet ein Polynomideal $\bar{\mathfrak{p}}$ in $x_2, \dots, x_m$ mit Koeffizienten in $P(u)$, das als solches ebenfalls ein Primideal ist, da aus $\varphi_1 \cdot \varphi_2 \equiv 0(\bar{\mathfrak{p}})$, also $(\mathfrak{p})$, die Zugehörigkeit wenigstens eines der beiden Faktorpolynome φ_1 oder φ_2 zu $\mathfrak{p}$, also zu $\bar{\mathfrak{p}}$ folgt. $\bar{\mathfrak{p}}$ ist als Polynomideal transformiert und entsteht aus der Gesamtheit aller zu $\mathfrak{p}(y)$ gehörenden Polynome von $y_2, \dots, y_m$ mit Koeffizienten in P vermöge der Transformation (1). $E^{(i)}$ ist die Elementarteilerform und gleichzeitig die Resultante von $\bar{\mathfrak{p}}$.

Für eine spätere Anwendung bemerken wir noch, daß $\mathfrak{p}$ selbst ebenfalls als ein Polynomideal aufgefaßt werden kann, und zwar in der Weise, daß man alle Elemente einer Basis $\omega_1, \dots, \omega_\mu$ der ganzen Größen von $\mathfrak{R}$ und die unabhängigen Variablen $x_2, \dots, x_m$ ins Auge faßt und ihre Relationen mod $\mathfrak{p}$ untersucht. Da jede ganze Größe von $\mathfrak{R}$ ein Polynom in diesen Größen ist, so entsteht hierbei aus $\mathfrak{p}$ ein Polynomideal, das als solches natürlich ebenfalls ein Primideal ist. Nach bekannten Sätzen gibt es alsdann eine lineare Verbindung ζ dieser Größen, so daß jede Größe aus $\mathfrak{R}$, insbesondere also jede ganze Größe als Polynom in ζ mit Koeffizienten in $P(u; x_{i+1}, \dots, x_m)$ mod $\mathfrak{p}$ darstellbar ist. Der Grad der irreduziblen Gleichung von ζ mod $\mathfrak{p}$ mit Koeffizienten in $P(u; x_{i+1}, \dots, x_m)$ ist dann gleich fp .

7. Es sei jetzt $\alpha = q$ ein *Primärideal* $\neq \mathfrak{o}$. Aus $\alpha\beta \equiv 0(q)$ folgt dann, daß entweder eine der beiden ganzen Größen α oder β , oder von jedem Faktor eine Potenz zu q gehört. Die Gesamtheit aller ganzen Größen, von denen eine Potenz zu q gehört, bildet ein Primideal, das zugehörige Primideal $\mathfrak{p}$ von q . Ist $E = E^{(2)} \dots E^{(m)}$ die Elementarteilerform von q und $E^{(2)} = \dots = E^{(i-1)} = 1$, dagegen $E^{(i)} \neq 1$, so folgt $g_2 = \dots = g_{i-1} = \mathfrak{o}$ und $E^{(i)} \equiv 0(q)$. Denn wäre $(E^{(i+1)} \dots E^{(m)})^\lambda \equiv 0(q)$, also ein Polynom von $x_{i+1}, \dots, x_m$ zu q gehörig, so würde $g_i = \mathfrak{o}$, also $N^{(i)}$ und somit $E^{(i)} = 1$ werden. Ferner ist $B^{(i+1)} \cdot g_i \equiv 0(q)$ und daher $g_i \equiv 0(q)$ und damit auch $g_i = g_{i+1} = \dots = q$. Es ist daher $E = E^{(i)}$ und $N(q) = N^{(i)}$. Wäre $E^{(i)}$ als Produkt zweier teilerfremder Polynome darstellbar, so müßte eine Potenz von beiden und damit der größte gemeinsame Teiler dieser beiden Potenzen in bezug auf x_i , also ein Polynom von $x_{i+1}, \dots, x_m$ zu q gehören, was nicht der Fall ist. Daher ist $E^{(i)}$ eine Potenz einer irreduziblen Funktion, eventuell die erste, auch wenn

q kein Primideal ist, wie schon Beispiele für $m = 2$ zeigen⁷⁾. $N^{(i)}$ ist eine Potenz derselben irreduziblen Funktion und durch $E^{(i)}$ teilbar. Da $E^{(i)} \equiv 0 \pmod{p}$ ist, so folgt, daß die irreduzible Funktion gleich der Elementarteilerform von p ist. $N(q)$ ist durch $N(p)$ teilbar, und aus $N(q) = N(p)$ folgt nach Nr. 5 $q = p$. Insbesondere gilt daher $q = p$, wenn $N(q)$ selbst irreduzibel ist.

Die Gesamtheit aller zu q gehörenden Polynome von $x_2, \dots, x_m$ bildet ein Polynomideal $\bar{q}$, das als solches ein Primärideal und transformiertes Ideal ist. $\bar{q}$ kann Primideal sein, ohne daß q selbst ein Primideal zu sein braucht. $E^{(i)}$ ist die Elementarteilerform von $\bar{q}$.

8. Es sei nunmehr α ein *ungemischtes Ideal*, d. h. kleinstes gemeinsames Vielfaches von größten Primärteilern $q_1, \dots, q_\lambda$ von ein und derselben Mannigfaltigkeit $m - i$. Dann ist wieder $g_i = \alpha$; denn ist $g_i^{(\sigma)}$ das Grundideal i -ter Stufe von q_σ , so folgt allgemein aus $\alpha = [q_1, \dots, q_\lambda]$ auch $g_i = [g_i^{(1)}, \dots, g_i^{(\lambda)}]$, und die Anwendung von Nr. 7 liefert $g_i = \alpha$. Die Norm von α ist dann ein Produkt von Faktoren von $x_i, \dots, x_m$ allein; ist sie ein Potenzprodukt von verschiedenen irreduziblen Faktoren, so zeigt man genau, wie H.-N. S. 73, daß das Ideal kleinstes gemeinsames Vielfaches von verschiedenen Teilidealen ist, deren Normen je die Potenzen der irreduziblen Faktoren in der Norm von α sind, und diese Zerlegung ist eindeutig. Es bleibt demnach nur noch der Fall näher zu untersuchen, daß die Norm von α die Potenz eines einzigen irreduziblen Faktors ist. Wir setzen dann $[q_1, \dots, q_{\sigma-1}, q_{\sigma+1}, \dots, q_\lambda] = r_\sigma$. Dann ist der größte gemeinsame Teiler $(r_1, \dots, r_\lambda)$ von niedrigerer Dimension, weil ein zugehöriges Primideal p dieses Ideales in dem größten gemeinsamen Teiler von mindestens zweien der zugehörigen Primideale $p_1, \dots, p_\lambda$ von $q_1, \dots, q_\lambda$ enthalten sein muß⁸⁾. Demnach gibt es Größen η_σ in r_σ , so daß $\eta_1 + \dots + \eta_\lambda = b^{(i+1)}$ ist. Offenbar ist ferner $\eta_\sigma \cdot \eta_\tau \equiv 0(\alpha)$ für $\sigma \neq \tau$, $\eta_\sigma^2 \equiv b^{(i+1)} \cdot \eta_\sigma(\alpha)$; sei nun für eine ganze Größe ω vorausgesetzt, daß

$$\omega = \alpha_1(\eta_2 + \dots + \eta_\lambda) = \dots = \alpha_\lambda(\eta_1 + \dots + \eta_{\lambda-1})$$

mit ganzen $\alpha_1, \dots, \alpha_\lambda$ gilt, so ist

$$\omega \eta_1 \equiv 0(\alpha), \dots, \omega \eta_\lambda \equiv 0(\alpha), \quad \text{also} \quad \omega b^{(i+1)} \equiv 0(\alpha),$$

und damit $\omega \equiv 0(\alpha)$. Demnach ist

⁷⁾ Man nehme etwa für $m = 2$: $(x_1 - c) \circ = p_1^{\alpha_1} \dots p_\lambda^{\alpha_\lambda}$; ist einer der Exponenten, etwa $\alpha_1 > 1$, also für $x_2 = c$ ein Verzweigungspunkt auf der Riemannschen Fläche vorhanden, so ist wegen $x_2 - c \equiv 0 \pmod{p_1^{\alpha_1}}$ $x_2 - c$ die Elementarteilerform des Primär-ideals $p_1^{\alpha_1}$.

⁸⁾ Wäre nämlich p in höchstens einem p_σ enthalten, so gäbe es ein Produkt $Q_1 \dots Q_{\sigma-1} \cdot Q_{\sigma+1} \dots Q_\lambda$, das zu r_σ , aber nicht zu p gehörte.

$$\alpha = [(\alpha, \eta_2 \dots + \eta_\lambda), \dots, (\alpha, \eta_1 + \dots + \eta_{\lambda-1})].$$

Nun gehört $\eta_2 + \dots + \eta_\lambda$ zu $q_1, \dots, \eta_1 + \dots + \eta_{\lambda-1}$ zu q_λ . Sei umgekehrt ω_1 eine Größe aus q_1 , so ist

$$\omega_1 \cdot b^{(i+1)} = \omega_1 (\eta_1 + \dots + \eta_\lambda) \equiv \omega_1 (\eta_2 + \dots + \eta_\lambda) (\alpha),$$

weil $\omega_1 \eta_1 \equiv 0 (\alpha)$ ist. Daher gilt $q_1 \cdot b^{(i+1)} \equiv 0 (\alpha, \eta_2 + \dots + \eta_\lambda)$ und analog $q_\lambda \cdot b^{(i+1)} \equiv 0 (\alpha, \eta_1 + \dots + \eta_{\lambda-1})$. Im Grundbereich $P(u; x_{i+1}, \dots, x_m)$ stimmen daher die Ideale q_1 und $(\alpha, \eta_2 + \dots + \eta_\lambda)$ usw. miteinander überein. Ferner folgt aus $\omega_1 \eta_1 + \dots + \omega_\lambda \eta_\lambda \equiv 0 (\alpha)$ durch Multiplikation mit η_σ :

$$\omega_\sigma \cdot \eta_\sigma^2 \equiv \omega_\sigma b^{(i+1)} \eta_\sigma \equiv 0 (\alpha),$$

also $\omega_\sigma \eta_\sigma \equiv 0 (\alpha)$. Die additive Zerlegung des Restsystems $g_{i-1} \bmod g_i$ oder $\mathfrak{o} \bmod \alpha$ in die Restsysteme $\mathfrak{o} \bmod q_1, \dots, \mathfrak{o} \bmod q_\lambda$ im Grundbereich $P(u; x_{i+1}, \dots, x_m)$ zeigt daher, daß die Anzahl der linear unabhängigen Restklassen des Restklassensystems für α gleich der Summe der entsprechenden Anzahlen für $q_1, \dots, q_\lambda$ ist. Weil nun aber die Normen von α und $q_1, \dots, q_\lambda$ Potenzen ein und derselben irreduziblen Funktion sind und weil der Grad der Norm jedesmal gleich der Anzahl der linear unabhängigen Elemente des betreffenden Restsystems ist, so folgt für die

Exponenten in $N(\alpha) = F^{(\alpha)}_{(i)}$, $N(q_\sigma) = F^{(\alpha_\sigma)}_{(i)}$ die Relation $\alpha_1 + \dots + \alpha_\lambda = \alpha$, $N(\alpha) = N(q_1) \dots N(q_\lambda)$. Für den vorliegenden Fall gilt ferner allgemein, daß auch das Ideal $\bar{\alpha}$ aller Polynome in $x_2, \dots, x_m$ aus α ungemischt ist, und daß die Resultantenform von $\bar{\alpha}$ dieselben irreduziblen Faktoren enthält wie $N(\alpha)$. Zum Beweise beachte man, daß

$$\bar{\alpha} = [\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_\lambda]$$

gilt, und ziehe die Sätze über Polynomideale heran.

9. Aus Nr. 6 und 7 folgt, daß die Normen von Prim- und Primär-idealen Potenzen von irreduziblen Funktionen sind. Die Umkehrung hiervon gilt nicht; denn schon Beispiele für $m = 2$ zeigen, daß das kleinste gemeinsame Vielfache von mehreren verschiedenen Primär-idealen sogar eine irreduzible Elementarteilerform und daher eine Norm haben kann, die Potenz einer irreduziblen Funktion ist (vgl. Anm. 7)). Andererseits zieht die Zerlegbarkeit der Norm in mehrere irreduzible Faktoren die Darstellung des Ideals als kleinstes gemeinsame Vielfache von mehreren Primär-idealen nach sich, weil das Ideal alsdann nach Nr. 7 nicht selbst primär sein kann. Genauer gilt, daß allgemein *jedem irreduziblen Faktor der Norm oder Elementarteilerform eines transformierten Ideals α ein oder mehrere Primärteiler einer kürzesten Darstellung von α durch größte Primär-ideale entsprechen.*

Es sei nämlich $\alpha = [q_1, \dots, q_\lambda]$ eine kürzeste Darstellung des Ideals als kleinstes gemeinsames Vielfaches von größten Primärteilern im Sinne der allgemeinen Idealtheorie in Ringbereichen (Anm. ⁴). Ist dann q_σ ein Primärteiler der Mannigfaltigkeit $m - i$, so ist $g_{i-1} \not\equiv 0(q_\sigma)$, weil sonst jedes Primärideal q von höherer Mannigfaltigkeit durch q_σ teilbar, also q_σ in der Darstellung von α entbehrlich wäre. Dann muß aber wegen

$$N^{(i)} \cdot g_{i-1} \equiv 0(g_i),$$

und wegen

$$g_i = [g_i^{(1)}, \dots, g_i^{(\lambda)}]$$

offenbar

$$N^{(i)} \cdot g_{i-1} \equiv 0(q_\sigma),$$

also

$$N^{(i)} \equiv 0(q_\sigma)$$

sein. Daher enthält die Teilnorm $N^{(i)}$ von α auch den irreduziblen Faktor von $N(q_\sigma)$ als Faktor.

Andererseits sei $F^{(i)}$ irgendein irreduzibler Faktor der Norm von α ; dann gibt es wenigstens ein q_σ in der Zerlegung von α , dessen Norm eine Potenz von $F^{(i)}$ ist. Würde nämlich zunächst keine Potenz von $F^{(i)}$ zu einem der q_σ gehören, so würde aus $E^{(i)} \cdot g_{i-1} \equiv 0(g_i^{(\sigma)})$ ($\sigma = 1, \dots, \lambda$) folgen, daß auch das von allen Faktoren $F^{(i)}$ befreite Polynom $E^{(i)*} = \frac{E^{(i)}}{F^{(i)}}$

die Eigenschaft $E^{(i)*} \cdot g_{i-1} \equiv 0(g_i^{(\sigma)})$ und damit (g_i) besäße, was im Widerspruch mit der Definition der Elementarteilerform steht. Gehört aber eine Potenz von $F^{(i)}$ zu einem q_σ , so sind die Grundideale bis zur $(i-1)$ -ten Stufe einschließlich für dieses q_σ gleich $\mathfrak{o}$. Daher ist g_{i-1} für α das kleinste gemeinsame Vielfache der Grundideale $(i-1)$ -ter Stufe der übrigen $q_1, \dots, q_\lambda$. Wäre jetzt für alle q_σ , die eine Potenz von $F^{(i)}$ enthalten, auch das Grundideal $g_i = \mathfrak{o}$, so würde $E^{(i)*} \cdot g_{i-1} \equiv 0(g_i^{(\sigma)})$ für alle $\sigma = 1, \dots, \lambda$ gelten,

also wäre $E^{(i)*} \cdot g_{i-1} \equiv 0(g_i)$, was nicht angeht. Es sei daher für ein bestimmtes σ das Ideal $g_i^{(\sigma)}$ ungleich $\mathfrak{o}$, also die Elementarteilerform i -ter Stufe $\neq 1$; dann muß wegen $F^{(i)*} \cdot g_{i-1} \equiv 0(g_i^{(\sigma)})$ diese Elementarteilerform als Faktor in $F^{(i)}$ enthalten, also ebenfalls eine Potenz von $F^{(i)}$ sein, und gleiches gilt von $N(q_\sigma)$. Hiermit ist die Behauptung bewiesen.

10. *Alle transformierten Hauptideale sind ungemischt von der Mannigfaltigkeit $m - 2$.*

Es sei η eine durch die Transformation (1) aus einer ganzen Größe $\eta(y)$ von $\mathfrak{R}(y)$ entstehende Größe aus $\mathfrak{R}$. Dann heißt das Ideal $\mathfrak{o}_\eta$ ein transformiertes Hauptideal.

Um nun den Satz zu beweisen, gehen wir von einem System $\omega_1, \dots, \omega_n$ von ganzen Größen des Körpers $\mathfrak{K}$ aus, das aus einer Basis der ganzen Größen des Körpers $\mathfrak{K}(y)$ über $P(y_3, \dots, y_m)$ durch Transformation entstanden ist. Für ein solches ist die Diskriminante $|S(\omega_\alpha \omega_\beta)|$ als transformiertes Polynom in x_2 regulär, und jede ganze Größe ω läßt sich in der Form

$$\omega = \frac{\sum_k a_k^{(2)} \omega_k}{N^{(2)}}$$

darstellen, wobei der Nenner ebenfalls in x_2 regulär ist. Aus einer Gleichung

$$b^{(3)} \cdot \gamma \equiv 0 \pmod{\eta} \quad \text{oder} \quad b^{(3)} \cdot \gamma = \omega \eta = \frac{\sum_k a_k^{(2)} \omega_k}{N^{(2)}} \eta, \quad (a_n^{(2)} \neq 0) \quad \text{und} \quad \gamma_k = \eta \omega_k$$

$$(k = 1, \dots, n-1)$$

mit ganzen Größen γ, ω, γ_k ergibt sich die Folgerung

$$N^{(2)} \cdot b^{(3)} \cdot \begin{vmatrix} \gamma_1 & \dots & \gamma_{n-1} & \gamma \\ \gamma'_1 & \dots & \gamma'_{n-1} & \gamma' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}^2 = (\eta \eta' \dots \eta^{(n-1)})^2 \cdot \begin{vmatrix} \omega_1 & \dots & \omega_{n-1} & \omega_n \\ \omega'_1 & \dots & \omega'_{n-1} & \omega'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}^2 a_n^{(2)},$$

und da auf der rechten Seite die Polynome $(\eta \eta' \dots \eta^{(n-1)})^2$ und $|S(\omega_\alpha \omega_\beta)|$ in x_2 regulär sind, so muß $a_n^{(2)}$ durch $b^{(3)}$, also $a_n^{(2)}$ durch $b^{(3)}$ im Polynomsinne teilbar sein. Gleiches gilt für alle von Null verschiedenen Koeffizienten $a_k^{(2)}$; es kann demnach $\omega = b^{(3)} \cdot \frac{\sum_k b_k^{(2)} \omega_k}{N^{(2)}}$ gesetzt werden.

Hierin ist nun der zweite Faktor ebenfalls ganz. Denn aus der Regularität von $N^{(2)}$ folgt die Teilbarkeit der Spur $S(\omega)$ durch $b^{(3)}$, allgemein die von $S(\omega^\nu)$ durch $b^{(3)\nu}$; und dann zeigen die Newtonschen Relationen, daß auch $\frac{\omega}{b^{(3)}} = \omega_1$ ganz ist.

Demnach gehört mit $b^{(3)} \cdot \gamma - \omega \eta$ auch $\gamma - \omega_1 \eta$ selbst zu dem Hauptideal; dieses ist daher ungemischt von der Dimension $m-2$.⁹⁾

Speziell gilt diese Behauptung im Falle eines Ideals $\mathfrak{a} = \mathfrak{o} \bar{\mathfrak{p}}$, wo $\bar{\mathfrak{p}}$ ein transformiertes Polynomideal aus Polynomen in $x_2, \dots, x_m$ von der Mannigfaltigkeit $m-2$ ist, das als solches ein Hauptideal ist.

⁹⁾ In gleicher Weise zeigt sich, daß, wenn $\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2}$ eine beliebige transformierte Größe des Körpers $\mathfrak{K}$ ist, das „Oberideal“ aller ganzen Größen der Form $\omega \eta$ mit ganzem ω ein reines Ideal der Mannigfaltigkeit $m-2$ wird, und ebenso das „Unterideal“ aller Faktoren ω als Oberideal von $\frac{1}{\eta}$. Zum Beweise hat man oben nur η durch $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ zu ersetzen und die Gleichung für die Diskriminante mit $(\eta_2 \eta'_2 \dots \eta_2^{(n-1)})^2$ zu multiplizieren.

Wir behaupten: t ist höchstens von der Mannigfaltigkeit $m - 3$.

Zum Beweise stellen wir zunächst fest, daß die Behauptung folgt, wenn für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von der Mannigfaltigkeit $m - 2$ eine Wahl der erzeugenden Größe ζ des Körpers möglich ist, so daß jede ganze Größe ω in $\mathfrak{R} \bmod \mathfrak{p}$ als Polynom höchstens $(n - 1)$ -ten Grades in ζ mit Polynomen von x_2 über $P(u; x_3, \dots, x_m)$ als Koeffizienten dargestellt werden kann. Bezeichnet man nämlich mit $\bar{\mathfrak{p}}$ das Primideal aller Polynome in $x_2, \dots, x_m$, die zu $\mathfrak{p}$ gehören, so kann alsdann ein Polynom in ζ und $x_2, \dots, x_m$ vom Grade $\leq n - 1$ in ζ nur unter der Bedingung zu $\mathfrak{o} \bar{\mathfrak{p}}$ gehören, daß alle Koeffizienten der Potenzen von ζ zu $\bar{\mathfrak{p}}$ gehören. Denn im anderen Falle würde $\zeta \bmod \mathfrak{o} \bar{\mathfrak{p}}$ einer Gleichung niedrigeren als n -ten Grades mit Koeffizienten in $x_2, \dots, x_m$, die $\bmod \bar{\mathfrak{p}}$ reduziert sind, genügen, was bei der vorausgesetzten Wahl von ζ zur Folge hätte, daß im Widerspruch zu § 1 Nr. 10 die Ordnung des Restsystems von $\mathfrak{o} \bmod \mathfrak{o} \bar{\mathfrak{p}}$ über $P(u; x_3, \dots, x_m)$ kleiner als $n p$ wäre, wo p den Grad der Elementarteilerform $\bar{E}^{(2)}$ von $\bar{\mathfrak{p}}$, die zugleich die eingliedrige Basis dieses Ideals darstellt, bedeutet. Ist also eine solche Wahl von ζ möglich, so kann die Elementarteilerform $E^{(2)}$ des Führer-Ideals $\mathfrak{a}_\zeta$ nicht zu $\bar{\mathfrak{p}}$ gehören. Denn sei etwa

$$E^{(2)} = E^{(2)*} \cdot \bar{E}^{(2)} \quad \text{und} \quad E^{(2)} \cdot \omega = \varphi(\zeta, x_2, \dots, x_m)$$

für irgendeine ganze Größe ω , so folgt wegen der vorausgesetzten Wahl von ζ , daß alle Koeffizienten des Polynoms φ in ζ durch $\bar{E}^{(2)}$ teilbar sein müßten; dann gehört aber auch $E^{(2)*}$ zum Führerideal und $E^{(2)}$ kann nicht die Elementarteilerform sein. Das adjungierte Ideal $\mathfrak{a}_\zeta$ kann infolgedessen das vorgegebene Primideal $\mathfrak{p}$ nicht als zugehöriges Primideal enthalten, und wenn für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von der Mannigfaltigkeit $m - 2$ eine entsprechende Wahl von ζ möglich ist, so kann der größte gemeinsame Teiler aller adjungierten Ideale überhaupt kein Primideal dieser Mannigfaltigkeit enthalten.

Um nun zu zeigen, daß bei Vorgabe eines Primideals $\mathfrak{p}$ von der Mannigfaltigkeit $m - 2$ eine entsprechende Wahl von ζ möglich ist, beachten wir, daß in der Zerlegung

$$\mathfrak{o} \bar{\mathfrak{p}} = [\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_\lambda]$$

alle Primärideale nach Nr. 10, § 1, von derselben Mannigfaltigkeit $m - 2$ sind und wegen $\mathfrak{q}_1 \dots \mathfrak{q}_\lambda \equiv 0(\mathfrak{p})$ mindestens ein Faktor, etwa $\mathfrak{q}_1$, $\equiv 0(\mathfrak{p})$ sein muß, so daß $\mathfrak{p}$ zugehöriges Primideal von $\mathfrak{q}_1$ ist. Wir setzen nun zunächst $\zeta = v_1 \omega_1 + \dots + v_\mu \omega_\mu + v_{\mu+1} x_2 + \dots + v_{\mu+m-1} x_m$ als lineare Verbindung einer Basis der ganzen Größen des Körpers und von $x_2, \dots, x_m$ mit unbestimmten Koeffizienten $v_1, \dots, v_{\mu+m-1}$ an. Ist dann $G_1(\zeta) = 0$

die Gleichung niedrigsten Grades für $\zeta \bmod \mathfrak{p}$ mit Koeffizienten im Körper $P(u; x_3, \dots, x_m)$, so gibt der Grad dieser Gleichung die Ordnung des Restsystems $\mathfrak{o} \bmod \mathfrak{p}$ nach Nr. 6, § 1, an, und jede ganze Größe ist bei geeigneter Wahl der $v_1, \dots, v_{\mu+m-1} \bmod \mathfrak{p}$ als Polynom in ζ vom Grade $f\mathfrak{p} - 1$ mit Koeffizienten in $P(u; x_3, \dots, x_m)$ darstellbar. Aus dieser Darstellung folgt aber vermöge der irreduziblen Gleichung für ζ über $P(u; (x_2, \dots, x_m))$ eine Darstellung jeder ganzen Größe als Polynom in ζ vom Grade $\leq n - 1$ mit Koeffizienten, die Polynome in x_2 mit Koeffizienten aus $P(u; x_3, \dots, x_m)$ sind. Hiermit ist die Behauptung bewiesen.

2. Es sei $\mathfrak{h}$ ein Modul in $\mathfrak{K}$ (vgl. Nr. 1, § 1). Wir betrachten alle Größen β' des Körpers $\mathfrak{K}$, deren Produkt mit jeder beliebigen Größe aus $\mathfrak{h}$ eine ganze Spur besitzt. Es soll also $S(\beta\beta')$ ein Polynom von $x_2, \dots, x_m$ sein, falls $\beta \equiv 0 \bmod \mathfrak{h}$ ist. Die Gesamtheit aller Größen β' bildet, wie man sich ohne weiteres überzeugt, wiederum einen Modul, den zu $\mathfrak{h}$ *komplementären Modul* $\mathfrak{h}'$. Ist $\mathfrak{h}$ speziell ein Ideal in $\mathfrak{K}$, so umfaßt $\mathfrak{h}'$ insbesondere die Gesamtheit aller ganzen Größen $\mathfrak{o}$ von $\mathfrak{K}$. Mit jedem β' gehört alsdann auch jedes Produkt $\omega\beta'$, wo ω ganz ist, zu $\mathfrak{h}'$.

Wenn der Modul $\mathfrak{h}$ speziell eine Basis aus n linear unabhängigen Größen $\beta_1, \dots, \beta_n$ besitzt, so daß also jedes β aus $\mathfrak{h}$ als lineare Verbindung dieser Größen mit Polynomen von $x_2, \dots, x_m$ als Koeffizienten darstellbar ist, so setzen wir mit Dedekind-Weber (a. a. O. § 10, Nr. 1) $S(\beta_r\beta_s) = b_{rs}$ und $\sum_s b_{rs}\beta'_s = \beta'_r$; dann ist $|b_{rs}| \neq 0$ und nach Nr. 3 a. a. O. für eine zu $\mathfrak{h}$ gehörende Größe $\beta = \sum_i b_i^{(2)} \cdot \beta_i$ der Koeffizient $b_i^{(2)} = S(\beta\beta'_i)$ ganz. Demnach gehört β'_i zu $\mathfrak{h}'$. Ist umgekehrt β' eine beliebige Größe aus $\mathfrak{h}'$, so können wir $\beta' = \sum_i \bar{b}_i^{(2)} \cdot \beta'_i$ mit rationalen Koeffizienten $\bar{b}_i^{(2)}$ in $x_2, \dots, x_m$ ansetzen, weil die Diskriminante von $\beta'_1, \dots, \beta'_n$ nach D.-W. gleich $\frac{1}{|b_{rs}|} \neq 0$ ist. Dann wird $\bar{b}_i^{(2)} = S(\beta'\beta_i)$, also $\bar{b}_i^{(2)}$ ein Polynom von $x_2, \dots, x_m$. Daher ist in diesem Falle der komplementäre Modul identisch mit dem komplementären Modul im Sinne von D.-W., also mit dem aus $\beta'_1, \dots, \beta'_n$ erzeugten Modul $\{\beta'_1, \dots, \beta'_n\}$.

Ist speziell $\mathfrak{h} = \mathfrak{o}$ die Gesamtheit aller ganzen Größen des Körpers, so nennen wir den zugehörigen Modul $\mathfrak{o}' = \mathfrak{e}$ den *komplementären Modul des Körpers* $\mathfrak{K}$; er hängt ab von der Wahl des Ausgangskörpers $P(u; x_2, \dots, x_m)$ der unabhängigen Variablen, da der Begriff der Spur von dieser Wahl abhängt, nicht dagegen von der Wahl der abhängigen Veränderlichen ζ , die den Körper $\mathfrak{K}$ über $P(u; x_2, \dots, x_m)$ erzeugt. Er umfaßt die Gesamtheit aller Größen ε , für die $S(\varepsilon\omega)$ ganz ist, wenn ω

ganz ist, und hat insofern die Eigenschaften eines Ideals, als für jedes ganze ω auch $\varepsilon \omega$ zu $\mathfrak{e}$ gehört, so daß

$$(3) \quad \mathfrak{o} \mathfrak{e} = \mathfrak{e}$$

ist.

Es sei ferner $G(\zeta) = \zeta^{(n)} + a_1^{(2)} \zeta^{n-1} + \dots + a_n^{(2)} = 0$ die irreduzible Gleichung für die ganze Größe ζ . Wie bei D.-W. § 10, Nr. 8 ergibt sich dann, daß der komplementäre Modul von $\{1, \zeta_1, \dots, \zeta^{n-1}\}$ gleich $\left\{ \frac{\eta_0}{\partial \zeta}, \frac{\eta_1}{\partial \zeta}, \dots, \frac{\eta_{n-1}}{\partial \zeta} \right\}$ wird, wobei η_λ den Ausdruck $a_{n-\lambda-1}^{(2)} + a_{n-\lambda-2}^{(2)} \zeta + \dots + a_1^{(2)} \cdot \zeta^{n-\lambda-2} + \zeta^{n-\lambda-1}$ bedeutet. Da $a_\sigma^{(2)}$ ein Polynom ist, so wird $\{1, \zeta, \dots, \zeta^{n-1}\} = \{\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-1}\}$.

Ist ε eine beliebige Größe aus $\mathfrak{e}$, so ist insbesondere auch $S(\varepsilon \psi)$ ganz, falls ψ ein Polynom von $\zeta, x_2, \dots, x_m$ darstellt. Demnach gehört jede Größe ε von $\mathfrak{e}$ zum komplementären Modul von $\{1, \zeta, \dots, \zeta^{n-1}\}$; und daher ist

$$\varepsilon \cdot \frac{\partial G}{\partial \zeta} = \varphi(\zeta, x_2, \dots, x_m)$$

ein Polynom in $\zeta, x_2, \dots, x_m$. Wegen (3) ist auch $\omega \varepsilon \frac{\partial G}{\partial \zeta}$ ein Polynom $\varphi_1(\zeta, x_2, \dots, x_m)$, also $\omega \varphi = \varphi_1$. Daher gehören alle Größen von $\mathfrak{e} \cdot \frac{\partial G}{\partial \zeta}$ zum Führerideal $\mathfrak{a}_\zeta$.

Es sei umgekehrt $\varphi(\zeta, x_2, \dots, x_m)$ eine Größe aus $\mathfrak{a}_\zeta$, also jedenfalls ein Polynom von $\zeta, x_2, \dots, x_m$. Dann ist für jedes ganze ω : $\frac{\varphi \omega}{\partial \zeta} = \frac{\varphi_1}{z \zeta}$ eine Größe des komplementären Moduls von $\{1, \zeta, \dots, \zeta^{n-1}\}$, als insbesondere $S\left(\frac{\varphi \omega}{\partial \zeta} \cdot \beta\right)$ für $\beta = 1$ ganz. Daher ist $\frac{\varphi}{\partial \zeta}$ zu $\mathfrak{e}$, als φ zu $\mathfrak{e} \frac{\partial G}{\partial \zeta}$ gehörig. Somit ist

$$(4) \quad \mathfrak{a}_\zeta = \mathfrak{e} \cdot \frac{\partial G}{\partial \zeta}.$$

Speziell gilt diese Gleichung für $\zeta = x_1$. Da aber die irreduzible Gleichung $F(x_1, \dots, x_m) = 0$ für x_1 in allen Variablen als regulär vorausgesetzt war, so läßt sich das System der unabhängigen Variablen $x_2, \dots, x_m$ unter Erhaltung dieser Gleichung gegen ein beliebiges System $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m$ vertauschen, wobei nicht nur die Gesamtheit aller ganzen Größen $\mathfrak{o}$, sondern auch das System aller Polynome in $x_1, \dots, x_m$ in sich übergeht. Die Führerideale $\mathfrak{a}_{x_1}, \dots, \mathfrak{a}_{x_m}$ sind daher sämtlich einander gleich. Entspricht ferner dem komplementären Modul $\mathfrak{e}_1$ bei Auszeichnung von x_1 der komplementäre Modul $\mathfrak{e}_i$ bei Auszeichnung von x_i , so zeigt (4), daß

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} e_1 = \dots = \frac{\partial F}{\partial x_m} e_m$$

wird. Da jedes e_i alle ganzen Größen und somit die 1 enthält, so ergibt sich, daß alle Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_m}$ zum adjungierten Ideal α_{x_1} gehören; alle Nullstellen des Führerideals sind daher singuläre Punkte des Gebildes $F = 0$.

3. Als *Verzweigungsideal* $\mathfrak{z}$ bezeichnen wir die Gesamtheit aller ganzen Größen ω , für die $\varepsilon \omega$ ganz ist, wenn ε zu e gehört. $\mathfrak{z}$ hängt nach seiner Definition von der Auswahl des Körpers der unabhängigen Veränderlichen, nicht aber von der Wahl der abhängigen Veränderlichen ab und ist ein transformiertes Ideal, daß aus dem entsprechend definierten Verzweigungsideal von $\mathfrak{R}(y)$ vermöge der Transformation (1) hervorgeht.

Wir führen ferner den größten gemeinsamen Teiler aller Ableitungen $\frac{\partial G}{\partial \xi}$ ein und bezeichnen dieses Ideal, das ebenfalls transformiert ist und aus dem entsprechenden Ideal in $\mathfrak{R}(y)$ vermöge (1) hervorgeht, mit $\mathfrak{z}'$. Es gilt alsdann wegen (4): $t = e \cdot \mathfrak{z}'$, also, weil t aus lauter ganzen Größen besteht, $\mathfrak{z}' = 0(\mathfrak{z})$. Ferner folgt aus derselben Gleichung durch Multiplikation mit $\mathfrak{z}'$:

$$(5) \quad \alpha_{\xi} \cdot \mathfrak{z}' = \frac{\partial G}{\partial \xi} \cdot t, \quad \text{speziell} \quad \alpha_{x_1} \cdot \mathfrak{z}' = \frac{\partial F}{\partial x_1} \cdot t.$$

Um die Norm des Ideals $\frac{\partial F}{\partial x_1} \cdot t$ zu berechnen, fassen wir zunächst das Hauptideal $\frac{\partial F}{\partial x_1} \circ$ ins Auge, das ein transformiertes Ideal ist. Nach § 1 Nr. 10 ist das Ideal ungemischt von der Mannigfaltigkeit $m - 2$, und hieraus ergibt sich, daß $N\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)$ die Diskriminante D der Gleichung $F = 0$ wird, die ein in x_2 reguläres Polynom von $x_2, \dots, x_m$ darstellt.

Wir behaupten ferner: $N\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \cdot t\right) = D \cdot N(t)$.

Es sei nämlich $\mathfrak{g}_{i-1}$ das Grundideal ($i - 1$)-ter Stufe von t , $\mathfrak{G}_{i-1}$ dasselbe von $\frac{\partial F}{\partial x_1} \cdot t$. Dann ist $\frac{\partial F}{\partial x_1} \cdot \mathfrak{g}_{i-1} = 0(\mathfrak{G}_{i-1})$. Sei jetzt umgekehrt $\gamma = 0(\mathfrak{G}_{i-1})$, also $b^{(i)} \cdot \gamma = 0\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} t\right)$; dann gilt bei geeigneter Wahl von $b^{(i)}$:

$$b^{(i)} \cdot \gamma = \omega \cdot \frac{\partial F}{\partial x_1} \cdot \vartheta = \omega_1 \frac{\partial F}{\partial x_1}$$

mit $\vartheta = 0(t)$ und ganzem ω_1 .

Hieraus folgt, da $\frac{\partial F}{\partial x_1} \circ$ ungemischt ist, wenn $i \geq 3$ ist, $\gamma = 0\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)$, also $\gamma = \gamma_1 \cdot \frac{\partial F}{\partial x_1}$ und daher $b^{(i)} \cdot \gamma_1 = \omega \vartheta$. Somit ist $\gamma_1 = 0(\mathfrak{g}_{i-1})$, also

$\gamma \equiv 0 \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} g_{i-1} \right)$, $\mathfrak{G}_{i-1} = \frac{\partial F}{\partial x_1} g_{i-1}$ für $i \geq 3$. Ferner ist nach Nr. 1, § 2 $g_2 = 0$, also $\mathfrak{G}_2 = \frac{\partial F}{\partial x_1} 0$, und $\mathfrak{G}_1 = g_1 = 0$. Somit ist $\mathfrak{G}_{i-1} \bmod \mathfrak{G}_i$ isomorph $g_{i-1} \bmod g_i$ für $i \geq 3$ und gleich $0 \bmod \frac{\partial F}{\partial x_1} 0$ für $i = 2$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aus (5) ergibt sich hiernach

$$(6) \quad D = N^{(2)}(\alpha \mathfrak{z}') = N^{(2)}(\alpha) \cdot N^{(2)}(\mathfrak{z}'), \quad N(t) = N^{(3)}(\alpha \mathfrak{z}'), \dots, N^{(m)}(\alpha \mathfrak{z}'),$$

da für die Teilnorm zweiter Stufe die Produktzerlegung gilt. Der größte gemeinsame Teiler aller Diskriminanten von ganzen Größen des Körpers ist daher die Teilnorm zweiter Stufe des Ideals $\mathfrak{z}'$, da die Faktoren $N^{(2)}(\alpha)$ nach Nr. 1, § 2, keinen gemeinsamen Faktor der Dimension $m - 2$ besitzen können. Für $m = 2$ wird dies der wesentliche Diskriminantenteiler im Sinne von Kronecker.

4. Wir behaupten jetzt $D \equiv 0(\mathfrak{z})$, oder, was dasselbe bedeutet: der Modul $D\epsilon$ ist ein Ideal. Hierzu haben wir zu beweisen, daß ϵD stets ganz ist für $\epsilon \equiv 0(\epsilon)$. Wir wählen zu diesem Zwecke aus einer Basis der ganzen Größen des Körpers irgendein Teilsystem von n Größen $\omega_{v_1}, \dots, \omega_{v_n}$ aus und behaupten zunächst, daß $S(\omega_{v_\alpha} \cdot \omega_{v_\beta})$ zu $\mathfrak{z}$ gehört. Dies bedarf nur dann eines Beweises, wenn $S(\omega_{v_\alpha} \cdot \omega_{v_\beta}) \neq 0$ ist. In diesem Falle kann eine beliebige Größe aus ϵ in der Form

$$\epsilon = r_1^{(2)} \omega_{v_1} + \dots + r_n^{(2)} \omega_{v_n}$$

angesetzt werden, wobei die Koeffizienten rationale Funktionen von $x_2, \dots, x_m$ sind. Hieraus ergibt sich

$$S(\epsilon \omega_{v_\beta}) = \sum_a r_a^{(2)} S(\omega_{v_\alpha} \cdot \omega_{v_\beta}) = b_\beta^{(2)},$$

und diese Funktion von $x_2, \dots, x_m$ ist ein Polynom; somit ergibt sich auch $|S(\omega_{v_\alpha} \cdot \omega_{v_\beta})| r_a^{(2)}$ als Polynom von $x_2, \dots, x_m$ und daher $\epsilon \cdot |S(\omega_{v_\alpha} \cdot \omega_{v_\beta})|$ als ganz, womit die Behauptung bewiesen ist. In gleicher Weise ergibt sich für ein anderes Teilsystem $\omega_{\mu_1}, \dots, \omega_{\mu_n}$ der Basisgrößen, daß allgemeiner stets $|S(\omega_{v_\alpha} \cdot \omega_{\mu_\beta})| \cdot \epsilon$ ganz ist, wenn $S(\omega_{v_\alpha} \cdot \omega_{v_\beta}) \neq 0$ ist; dann ist nämlich wegen

$$\begin{array}{ccc} \omega_{v_1} \dots \omega_{v_n} & \cdot & \omega_{\mu_1} \dots \omega_{\mu_n} \\ |S(\omega_{v_\alpha} \cdot \omega_{\mu_\beta})| = & | \omega'_{v_1} \dots \omega'_{v_n} | \cdot & | \omega'_{\mu_1} \dots \omega'_{\mu_n} | \\ \dots & \dots & \dots \end{array}$$

auch $|S(\omega_{v_\alpha} \cdot \omega_{v_\beta})| \neq 0$, und man zieht aus

$$S(\epsilon \omega_{\mu_\beta}) = \sum_a r_a^{(2)} S(\omega_{v_\alpha} \omega_{\mu_\beta}) = b_\beta^{(2)}$$

so folgt im analogen Sinne

$$N(a_\zeta) \cdot (\varrho_\sigma + \varrho'_\sigma + \dots) = a_0 f_\sigma + a_1 (\zeta_\sigma + \zeta'_\sigma + \dots) \\ + \dots + a_{n-1} (\zeta_\sigma^{n-1} + \zeta'_\sigma{}^{n-1} + \dots).$$

Nun ist aber $\varrho \equiv 0 (\mathfrak{p}_\sigma)$, also im Körper der Polynom-Restklassen mod $E^{(2)}$ als Koeffizientenbereich die Gleichung des Grades f_σ für $\varrho \bmod \mathfrak{p}_\sigma$ einfach $\varrho^{f_\sigma} \equiv 0 (\mathfrak{p}_\sigma)$. Demnach ist $\varrho_\sigma + \varrho'_\sigma + \dots \equiv 0 (\mathfrak{p}_\sigma)$, also das Polynom in $x_2, \dots, x_m$

$$f_\sigma \cdot a_0 + a_1 (\zeta_\sigma + \zeta'_\sigma + \dots) + \dots + a_{n-1} (\zeta_\sigma^{n-1} + \zeta'_\sigma{}^{n-1} + \dots)$$

zu $\mathfrak{p}_\sigma$, also zu dem Polynomideal $E^{(2)}$ gehörig.

Hieraus folgt durch Multiplikation mit β_σ und Addition

$$N(a_\zeta) \cdot S(\varrho) = n a_0 + a_1 S(\zeta) + \dots + a_{n-1} \cdot S(\zeta^{n-1}) \equiv 0 (E^{(2)}),$$

woraus sich wegen $N(a_\zeta) \not\equiv 0 (E^{(2)})$ ergibt: $S(\varrho) \equiv 0 (E^{(2)})$.

Ist demnach jetzt ϱ eine Größe aus $\mathfrak{r}$, so ist $S(\varrho)$ durch r teilbar, also $S\left(\frac{\omega \varrho}{r}\right)$ ganz für jedes ganze ω . Daher gehört $\frac{\varrho}{r}$ zu $\mathfrak{e}$, also $\mathfrak{r}$ zu $\mathfrak{r}\mathfrak{e}$, und somit $D\mathfrak{r}$ zu dem Ideal $D\mathfrak{r}\mathfrak{e}$. Die Norm des ersteren Ideals ist gleich $N(D) \cdot N(\mathfrak{r})$ gleich $\frac{D^n \cdot r^n}{N^{(2)}(\mathfrak{d}')} = D^{n-1} \cdot N^{(2)}(\alpha) \cdot r^n$, da auch $D\mathfrak{r}$ ein reines Ideal der Mannigfaltigkeit $m-2$ ist¹⁰⁾. Für letzteres Ideal bestimmt sich nach D.-W. die Teilnorm zweiter Stufe ebenfalls zu $D^{n-1} \cdot N^{(2)}(\alpha) \cdot r^n$. Demnach stimmen die Teilnormen zweiter Stufe und somit die Grundideale zweiter Stufe von $D\mathfrak{r}$ und $D\mathfrak{r}\mathfrak{e}$ miteinander überein; da aber das erste ungemischt ist, so wird $D\mathfrak{r}\mathfrak{e} = [D\mathfrak{r}, \mathfrak{e}]$ und somit, weil andererseits $D\mathfrak{r}$ ein Vielfaches von $D\mathfrak{r}\mathfrak{e}$ ist, $D\mathfrak{r} = D\mathfrak{r}\mathfrak{e}$, also auch

$$(7) \quad \mathfrak{r} = \mathfrak{r}\mathfrak{e}.$$

5. Die Gleichung (7) gestattet wegen (4) nach Multiplikation mit

$\frac{\partial G}{\partial \zeta}$ die Folgerung

$$(8) \quad \frac{\partial G}{\partial \zeta} \mathfrak{r} = r a_\zeta.$$

Hierin stellt die linke Seite ein ungemischtes Ideal der Mannigfaltigkeit $m-2$ dar; denn ist $b^{(3)}\gamma \equiv 0 \left(\frac{\partial G}{\partial \zeta} \mathfrak{r}\right)$, also $b^{(3)}\gamma \equiv 0 \left(\frac{\partial G}{\partial \zeta}\right)$, so folgt aus § 1 Nr. 10, daß $\gamma \equiv 0 \left(\frac{\partial G}{\partial \zeta}\right)$, also $\gamma = \gamma_1 \frac{\partial G}{\partial \zeta}$ und γ_1 ganz sein muß. Hiernach ist $b^{(3)}\gamma_1 \equiv 0(\mathfrak{r})$, und dies liefert, da $\mathfrak{r}$ nach seiner Definition ein

¹⁰⁾ In der Tat folgt aus $b^{(3)}\gamma \equiv 0(D\mathfrak{r})$, also $\equiv 0(D)$, daß $\gamma \equiv 0(D)$, also $\gamma = \gamma_1 D$ und damit $b^{(3)}\gamma_1 \equiv 0(\mathfrak{r})$ ist. Dann ist aber $\gamma_1 \equiv 0(\mathfrak{r})$, also $\gamma \equiv 0(D\mathfrak{r})$.

ungemischtes Ideal ist, $\gamma_1 \equiv 0(\mathfrak{r})$. Somit kommt $\gamma \equiv 0\left(\frac{\partial G}{\partial \xi} \mathfrak{r}\right)$, wie behauptet.

Alsdann folgt aber aus (8), daß auch α_ξ ungemischt und von der Mannigfaltigkeit $m - 2$ ¹¹⁾ ist. Denn wäre dies nicht der Fall, so wäre ein γ vorhanden, das nicht zu α_ξ gehörte, so daß $b^{(3)} \cdot \gamma \equiv 0(\alpha_\xi)$ wäre; dann wäre aber $r \cdot \gamma$ nicht zu $r\alpha_\xi = \frac{\partial G}{\partial \xi} \mathfrak{r}$ gehörig und trotzdem $b^{(3)} \cdot r\gamma \equiv 0\left(\frac{\partial G}{\partial \xi} \mathfrak{r}\right)$, was nach dem soeben Bewiesenen nicht möglich ist.

Ferner zeigen wir, daß das Verzweigungsideal $\mathfrak{z}$ ungemischt und von der Mannigfaltigkeit $m - 2$ ist¹¹⁾. Aus (7) folgt nämlich, daß für jedes $\omega \equiv 0(\mathfrak{z})$ der Ausdruck $\frac{\omega \varrho}{r}$ ganz ist, wenn ϱ zu $\mathfrak{r}$ gehört. Es sei nun $b^{(3)} \gamma \equiv 0(\mathfrak{z})$, also $\frac{b^{(3)} \varrho \gamma}{r} = \omega_1$ ganz. Dann ist $S(\omega_1) = S\left(\frac{\varrho \gamma}{r}\right) b^{(3)}$ durch $b^{(3)}$ teilbar; allgemeiner gilt: $S(\omega_1^\nu) = b^{(3)\nu} \cdot S\left(\left(\frac{\varrho \gamma}{r}\right)^\nu\right) = \frac{b^{(3)\nu}}{r^\nu} \cdot S((\gamma \varrho)^\nu)$. Da nun r in x_2 regulär ist, so muß $S((\gamma \varrho)^\nu)$ durch r^ν teilbar sein, also ist $S\left(\left(\frac{\gamma \varrho}{r}\right)^\nu\right) = S\left(\left(\frac{\omega_1}{b^{(3)}}\right)^\nu\right)$ ganz für jedes positive ganze ν . Dann zeigen aber die Newtonschen Relationen, daß $\frac{\omega_1}{b^{(3)}}$ selbst ganz sein muß; also ist $\frac{\gamma \varrho}{r} = \gamma \varepsilon$ ganz für jedes $\varepsilon \equiv 0(\mathfrak{c})$, und damit $\gamma \equiv 0(\mathfrak{z})$. Gleichung (6) kann demnach wie für $m = 2$ einfach in der Form

$$(6a) \quad D = N(\mathfrak{a}) \cdot N(\mathfrak{z})$$

geschrieben werden. Die „Körperdiskriminante“ im Sinne von Dedekind ist also wie für $m = 2$ die Norm des Verzweigungsideals, der außerwesentliche Diskriminantenteiler die Norm des Führerideals.

Aus (4) ergibt sich weiterhin $t = \mathfrak{c} \mathfrak{z}'$; setzen wir andererseits das Ideal $\mathfrak{e} \mathfrak{z} = t'$, so kommt

$$(9) \quad \mathfrak{z} t = \mathfrak{z}' t'.$$

Hierin ist $\mathfrak{z}' \equiv 0(\mathfrak{z})$, also $\mathfrak{e} \mathfrak{z}' \equiv 0(\mathfrak{e} \mathfrak{z})$, d. h. $t \equiv 0(t')$. Da nun t höchstens die Mannigfaltigkeit $m - 3$ besitzt, so gilt dasselbe von t' . Für den Fall $m = 2$ geht daher die Gleichung (9) in die bekannte einfache Beziehung $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}'$ über.

Aus (8) ergibt sich ferner

$$(10) \quad r t = \mathfrak{z}' r,$$

woraus wie in Nr. 3 folgt

$$(11) \quad N(t) = N^{(3)}(\mathfrak{z}' r) \dots N^{(m)}(\mathfrak{z}' r).$$

¹¹⁾ Außer wenn das Ideal $= \mathfrak{o}$ ist.

Endlich liefert (7) nach Multiplikation mit $\mathfrak{z}$:

$$(12) \quad r t' = r \mathfrak{z}$$

und

$$(13) \quad N(t') = N^{(3)}(r \mathfrak{z}) \dots N^{(m)}(r \mathfrak{z}).$$

Die Gleichungen (10) bis (13) zeigen, wie die Ideale t, t' und ihre Normen mit Hilfe der Ideale $\mathfrak{z}, \mathfrak{z}'$ und r dargestellt werden können.

§ 3.

Die Riemannsche Fläche des Körpers $\mathfrak{K}(y)$.

1. Es sei η eine beliebige Größe aus $\mathfrak{K}(y)$; wir adjungieren $y_3, \dots, y_m$ zum Grundbereiche und stellen in $P(y_3, \dots, y_m) = P^*$ die Größe η in der Form $\frac{b^*}{a^*}$ dar, wo a^* und b^* Ideale in $\mathfrak{K}^*$, also in $\mathfrak{K}(y)$ über P^* bedeuten. Es ist dann bekanntlich a^* und b^* als Produkt von Primidealen darstellbar, und da in diesem Falle, wenn t^* den größten gemeinsamen Teiler von a^* und b^* bedeutet, $a^* = a_0^* t^*$, $b^* = b_0^* t^*$ gesetzt werden kann, so ergibt sich für η die Darstellung $\eta = \frac{b_0^*}{a_0^*}$ durch relativ prime Ideale a_0^* und b_0^* (vgl. D.-W., § 12, 1.). Ist nun $a(y)$ das Unterideal, $b(y)$ das Oberideal von η in $\mathfrak{K}(y)$, so ist $A^{(3)} \cdot a_0^* \equiv 0(a(y))$, $B^{(3)} \cdot b_0^* \equiv 0(b(y))$; hätten nun $a(y)$ und $b(y)$ einen Primteiler $p(y)$ von der Mannigfaltigkeit $m - 2$ gemeinsam, so würde das daraus erzeugte Primideal p^* in $\mathfrak{K}^*$ in a_0^* und b_0^* enthalten sein, was nicht möglich ist. Daher ist der größte gemeinsame Teiler von $a(y)$ und $b(y)$ höchstens von der Mannigfaltigkeit $m - 3$.

Ist nun irgendein Primideal $p(y)$ von der Mannigfaltigkeit $m - 2$ gegeben, so fassen wir alle Größen η des Körpers $\mathfrak{K}(y)$ ins Auge, deren Unterideal nicht durch $p(y)$ teilbar ist. Erweitern wir jetzt das System $p(y)$ zu dem System $\tilde{p}(y)$ aller derjenigen Größen aus $\mathfrak{K}(y)$, deren Oberideal durch $p(y)$ teilbar ist (alsdann ist nach dem Vorangehenden das Unterideal sicher nicht durch $p(y)$ teilbar), so können wir alle Größen η aus $\mathfrak{K}(y)$, deren Unterideal nicht durch $p(y)$ teilbar ist, in Restklassen mod $\tilde{p}(y)$ einteilen, indem wir in ein und dieselbe Restklasse zwei Größen dann und nur dann aufnehmen, wenn ihre Differenz zu $\tilde{p}(y)$ gehört. Man zeigt dann leicht, daß Summe, Differenz, Produkt und Quotient zweier Restklassen stets definiert und wieder Restklassen mod $\tilde{p}(y)$ sind, wenn man im Nenner die Restklasse 0 vermeidet. Die Restklassen mod $\tilde{p}(y)$ bilden daher einen zu $\mathfrak{K}(y)$ isomorphen Körper der Mannigfaltigkeit $m - 2$, insofern als der Summe, Differenz, dem Produkte und Quotienten irgend zweier Elemente von $\mathfrak{K}(y)$ die entsprechenden Verbindungen der zugehörigen

Restklassen $\text{mod } \tilde{p}(y)$ zugeordnet sind, und insofern $\text{mod } \tilde{p}(y)$ nur $m - 2$ algebraisch unabhängige Größen in $\mathfrak{K}(y)$ existieren. Lediglich diejenigen Elemente von $\mathfrak{K}(y)$ sind dabei zunächst ausgeschlossen, deren Unterideal durch $p(y)$ teilbar ist; insofern die reziproken Werte dieser Größen sämtlich der Restklasse Null angehören, wollen wir die Übereinkunft treffen, sie alle in der „Restklasse ∞ “ $\text{mod } \tilde{p}(y)$ zusammenzufassen. Es sind dann für diese Restklasse die Operationen $\frac{R}{\infty} = 0$, $\frac{R}{0} = \infty$ definiert, wenn R irgendeine von Null verschiedene Restklasse $\text{mod } \tilde{p}(y)$ bedeutet.

Wir stellen nun die folgende Definition auf:

Es sei irgendeine Einteilung der sämtlichen Elemente des Körpers $\mathfrak{K}(y)$ in Systeme von Elementen vorgegeben, die folgende Eigenschaften hat:

1. *Die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division irgend zweier Elemente, die verschiedenen Systemen oder demselben Systeme angehören, führt stets wieder zu einem Elemente, das einem durch die gegebenen Systeme eindeutig bestimmten dritten Systeme angehört, so daß diese Operationen für die Systeme selbst definiert werden können. Die Division durch dasjenige System, dem das Element Null angehört (kurz: das System Null), ist dabei nur definiert, wenn der Zähler von Null verschieden ist, und führt ebenfalls zu einem bestimmten System, zu dem „System ∞ “. Es ist ferner $\frac{\eta}{\infty} = 0$, wenn η irgendein von Null verschiedenes Element bedeutet. Andere Operationen mit dem System ∞ sind nicht definiert.*

2. *Die Mannigfaltigkeit der verschiedenen Systeme ist gleich $m - 2$, d. h. es gibt genau und nicht mehr als $m - 2$ Systeme, zwischen denen keine algebraische Relation mit Koeffizienten in P besteht.*

Jede solche Einteilung nennen wir einen Punkt oder eine Stelle des Körpers $\mathfrak{K}(y)$. Nach der Definition hängt der Begriff des Punktes in keiner Weise von der Wahl der Erzeugenden des Körpers $\mathfrak{K}(y)$ ab, sondern ist ein zum Körper gehöriger invarianter Begriff. Zwei Punkte heißen voneinander verschieden, wenn die zugehörigen Einteilungen voneinander verschieden sind.

Die Existenz eines Punktes ist nach dem Vorangehenden dadurch sichergestellt, daß nach Wahl eines beliebigen Systems von algebraisch unabhängigen Erzeugenden $y_2, \dots, y_m$ jedes Primideal $p(y)$ zu einer Einteilung in Restklassen $\text{mod } \tilde{p}(y)$ Anlaß gibt, die sämtliche Eigenschaften eines Punktes besitzt.

Für den Fall $m = 2$ führt die obige Definition auf die Definition des Punktes nach D.-W., a. a. O. § 14. Jedem System unserer Einteilung entspricht nämlich alsdann nach der Eigenschaft 2. eine algebraische Gleichung

mit Koeffizienten in P , der jedes Element des Systems genügt, und die als irreduzibel in P angenommen werden kann. Ist P speziell algebraisch abgeschlossen, was ja bei D.-W. angenommen wird, so ist die Gleichung vom 1. Grade; d. h. jedem System ist ein *Zahlwert* zugeordnet, der Wert aller Elemente des Systems „in dem betreffenden Punkte“.

Die Gesamtheit aller Punkte von $\mathfrak{R}(y)$ bezeichnen wir als die Riemannsche Fläche von $\mathfrak{R}(y)$.

2. Es sei ein Punkt der Riemannschen Fläche gegeben. Wir behaupten, daß eine Wahl der unabhängigen erzeugenden Elemente $y_2, \dots, y_m$ des Körpers möglich ist, so daß der Punkt durch ein Primideal $\mathfrak{p}(y)$ im Sinne von Nr. 2 erzeugt wird. Zu diesem Zwecke brauchen wir nur je ein Element aus irgend $m - 2$ algebraisch unabhängigen Systemen, etwa $y_3, \dots, y_m$, und ein weiteres Element y_2 auszuwählen, das einem von den vorigen Systemen verschiedenen System angehört und von $y_3, \dots, y_m$ algebraisch unabhängig ist. Ein solches Element gibt es; denn sonst müßte jedes von $y_3, \dots, y_m$ algebraisch unabhängige Element y_2 in einem der vorigen Systeme enthalten sein, was nicht möglich ist, da z. B., wenn y_2 und y_3 demselben System angehören, $y_2 - y_3$ dem System Null, also bei geeigneter Wahl von $y_3, \dots, y_m$ einem von diesen verschiedenen System angehört. Es kann auch vermieden werden, daß eine der Größen $y_2, \dots, y_m$ dem System ∞ angehören, indem man evtl. zu $\frac{1}{y_i} + c$ mit $c \neq 0$ übergeht. Jedes weitere Element ist dann von $y_2, \dots, y_m$ algebraisch abhängig und durch ein erzeugendes Element $x_1 = y_1$ des Körpers $\mathfrak{R}(y)$ über $P(y_2, \dots, y_m)$ darstellbar.

Alsdann betrachten wir sämtliche Elemente des Systems Null, ausgedrückt durch $y_1, \dots, y_m$. Alle in bezug auf $y_2, \dots, y_m$ ganzen Größen unter diesen bilden ein Ideal $\mathfrak{p}(y)$, das wegen der Isomorphie der Systeme mit den Körperelementen ein Primideal sein muß. Da sämtliche Elemente η Quotienten zweier ganzen Größen sind und mit $\frac{\alpha}{\beta}$ auch α dem Nullsystem angehört, so besteht dieses aus lauter Größen $\eta = \frac{\alpha}{\beta}$, deren Oberideal α zu $\mathfrak{p}$ gehört. Dann ist das Unterideal $\mathfrak{b}$ nach Nr. 1 nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbar. Unser System Null setzt sich daher aus den früher mit $\tilde{\mathfrak{p}}(y)$ bezeichneten Elementen zusammen. Da nun die ganze Einteilung durch die Angabe des Systems 0 bereits definiert ist, weil nämlich zwei Größen η und η' dann und nur dann demselben System angehören, wenn $\eta - \eta'$ dem System 0 angehört, so erweist sich der vorgelegte Punkt als erzeugt durch das Primideal $\mathfrak{p}(y)$ und die Einteilung mit derjenigen in die Restklassen mod $\tilde{\mathfrak{p}}(y)$ als identisch. $\mathfrak{p}(y)$ ist daher von der Mannigfaltigkeit $m - 2$, und das Nullsystem identisch mit dem früher als $\tilde{\mathfrak{p}}(y)$ bezeichneten System. Zu-

gleich zeigt sich, daß bei zwei verschiedenen Punkten bereits ganze Funktionen von $y_2, \dots, y_m$ existieren müssen, die bei beiden Einteilungen in verschiedenen Systemen auftreten.

In ähnlicher Weise zeigt man leicht, bei Vorgabe von endlich vielen Punkten, stets eine Wahl der Erzeugenden $y_2, \dots, y_m$ möglich ist, so daß die zugehörigen Einteilungen durch gewisse Primideale aus ganzen Funktionen von $y_2, \dots, y_m$ definiert werden können.

Andererseits sind bei fester Wahl von $y_2, \dots, y_m$ keineswegs alle Punkte ω durch Primideale $m - 2$ -ter Dimension definierbar. Einmal kann eine der Variablen bei der Einteilung dem System ∞ angehören; dieser Fall tritt bereits bei $m = 2$ auf und kann durch Übergang zu $\frac{1}{y_1}$ an Stelle von y_1 berücksichtigt werden. Andererseits ist es aber im Gegensatz zum Falle $m = 2$ bei $m > 2$ möglich, daß bei einer gegebenen Einteilung innerhalb eines und desselben Systems zwei oder mehrere algebraisch unabhängige Elemente auftreten, deren Verwendung als neue Erzeugende zur Folge hat, daß der betr. Punkt nicht durch ein Primideal $(m - 2)$ -ter Dimension in $y_2, \dots, y_m$ erzeugt werden kann. Nehmen wir etwa den Körper aller rationaler Funktionen von y_2, y_3 und betrachten das Primideal $\mathfrak{p}(y) = \mathfrak{o} y_2$. In der zugehörigen Restklasse 0 ist z. B. das Element $y'_3 = y_2 y_3$ enthalten, das mit $y'_2 = y_2$ zusammen geeignet ist, den Körper zu erzeugen. In der Darstellung durch y'_2, y'_3 entspricht aber dem Primideal $\mathfrak{o} \mathfrak{p}_2$ das Ideal $\mathfrak{o} y'_2, \mathfrak{o} y'_3$, also kein Ideal der Mannigfaltigkeit 1. Analoges wird immer eintreten, wenn innerhalb eines und desselben Systems mehrere unabhängige Elemente auftreten, die als Erzeugende gewählt werden. In den neuen Erzeugenden entspricht dem Primideal $\mathfrak{p}(y)$ ein Primideal von niedrigerer Mannigfaltigkeit. Es ist daher nicht möglich, die „Riemannsche Fläche“ für $m > 2$ bei einer festen Wahl der Erzeugenden durch einfache Hinzufügung der unendlich fernen Elemente zum Abschluß zu bringen. Aber dieser Umstand hindert andererseits nicht, wie wir gesehen haben, trotzdem die Punkte oder Stellen des Körpers invariant zu definieren.

3. Es sei $\mathfrak{P}$ ein beliebiger Punkt des Körpers. Von allen dem Nullsystem von $\mathfrak{P}$ angehörigen Größen aus $\mathfrak{K}$ sagen wir auch kurz, daß sie in $\mathfrak{P}$ verschwinden. Es handelt sich nun um die Definition der Ordnung des Verschwindens.

Wir fassen eine Darstellung der Größen des Körpers ins Auge, bei der dem Punkt $\mathfrak{P}$ das Primideal $\mathfrak{p}(y)$ entspricht. Es sei dann $\mathfrak{o}$ eine Größe des Körpers, deren Oberideal durch $\mathfrak{p}(y)$ teilbar ist, die aber im Körper $\mathfrak{K}^*$ (nach Adjunktion von $y_2, \dots, y_m$ zu P) ein nicht durch $\mathfrak{p}^{*2}$ teilbares Oberideal besitzt. Ist dann π irgendeine in $\mathfrak{P}$ verschwindende Größe, so wird in $\mathfrak{K}^* \frac{\pi}{\mathfrak{o}}$ stets endlich bleiben, also kann auch in $\mathfrak{K}$ die

Größe $\frac{\pi}{\varrho}$ nicht dem System ∞ angehören (weil sonst $\frac{\varrho}{\pi}$ dem System 0 in $\mathfrak{R}$, also in $\mathfrak{R}^*$, angehörte). Jede in $\mathfrak{P}$ verschwindende Größe ϱ , für die $\frac{\pi}{\varrho}$ stets endlich bleibt, wenn π irgendeine in $\mathfrak{P}$ verschwindende Größe bedeutet, heißt in $\mathfrak{P}$ von 1. Ordnung 0. Diese Eigenschaft ist von der Wahl der erzeugenden Elemente des Körpers vollständig unabhängig. Der Quotient $\frac{\varrho'}{\varrho}$ zweier solcher Größen ϱ' und ϱ ist dann in $\mathfrak{P}$ weder 0 noch ∞ , und umgekehrt, wenn dies zutrifft, so ist auch ϱ' in $\mathfrak{P}$ von der 1. Ordnung 0.

Ist ferner π eine Größe, deren Oberideal in $\mathfrak{R}^*$ genau durch $\mathfrak{p}^{*r}$ teilbar ist, so ist $\frac{\pi}{\varrho^r}$ in $\mathfrak{P}$ weder 0 noch ∞ , wenn ϱ irgendeine von 1. Ordnung in $\mathfrak{P}$ verschwindende Größe bedeutet. Jede Größe π , für die $\frac{\pi}{\varrho^r}$ in $\mathfrak{P}$ weder 0 noch ∞ wird, heißt dann in $\mathfrak{P}$ von r -ter Ordnung 0. Auch diese Definition ist im Körper invariant, da ϱ durch irgendeine Größe ϱ' ersetzt werden kann, die ebenfalls von der Ordnung 1 in $\mathfrak{P}$ verschwindet.

Analog definieren wir für π die Ordnung $-r$ in $\mathfrak{P}$, wenn $\frac{1}{\pi}$ in $\mathfrak{P}$ von der Ordnung r verschwindet, und sagen alsdann, daß π in dem Punkte $\mathfrak{P}$ von der Ordnung r unendlich wird. Jede in $\mathfrak{P}$ verschwindende oder unendliche Größe hat demnach eine bestimmte positive oder negative Ordnungszahl, da dies in $\mathfrak{R}^*$ der Fall ist und die Ordnungszahl in $\mathfrak{R}^*$ mit der in $\mathfrak{R}$ übereinstimmt.

Breslau, Pfingsten 1927.

(Eingegangen am 8. Juni 1927.)

Bemerkung zur Arbeit von Herrn T. Y. Thomas „A projective theory of affinely connected manifolds“.

Von

V. Hlavatý in Prag.

In der oben zitierten Arbeit[†] ist Herr T. Y. Thomas, ausgehend von der vektoriellen affinen Übertragung, mit den symmetrischen Koeffizienten $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu = \Gamma_{\mu\lambda}^\nu$ zu einer projektiven Übertragung gelangt. Diese kurze Mitteilung bezweckt eine Verallgemeinerung der interessanten Arbeit von Herrn Thomas. Dabei wird die *nichtsymmetrische* affine Übertragung zugrunde gelegt.

I. Ausgehend von der Transformationsgruppe

$$(1^*) \quad x^\nu = x^\nu(\bar{x}^1 \dots \bar{x}^n), \quad \Delta = \left| \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\lambda} \right|$$

der Urvariablen der affinen Mannigfaltigkeit, sucht Herr Thomas solche Koeffizienten ${}^* \Gamma_{bc}^a$ ^{††} anzugeben, die sich bei der Gruppe ${}^* G$

$$(3^*) \quad x^\nu = x^\nu(\bar{x}^1 \dots \bar{x}^n), \quad x^0 = \bar{x}^0 + \log \Delta$$

nach

$$(11^*) \quad {}^* \bar{\Gamma}_{bc}^a = \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i} \left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^b \partial \bar{x}^c} + \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^b} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^c} {}^* \Gamma_{jk}^i \right)$$

transformieren, um sie dann als Koeffizienten der projektiven Übertragung bezeichnen zu können. Er gelangt zu den Formeln

$$(9^*) \quad \begin{aligned} \text{a) } {}^* \Gamma_{\lambda\mu}^\nu &= {}^* \Gamma_{\mu\lambda}^\nu = H_{\lambda\mu}^\nu, & \text{b) } {}^* \Gamma_{j0}^i &= {}^* \Gamma_{0j}^i = -\frac{\delta_j^i}{n+1}, \\ \text{c) } {}^* \Gamma_{\lambda\mu}^0 &= {}^* \Gamma_{\mu\lambda}^0 = \frac{n+1}{n-1} \mathfrak{B}_{\lambda\mu}^\sigma \end{aligned}$$

[†] Math. Zeitschrift 25, S. 723–733. Die mit * bezeichneten Nummern beziehen sich auf die Numerierung dieser Arbeit.

^{††} Die griechischen Zeiger durchlaufen die Werte 1, ..., n zur Unterscheidung von den lateinischen Zeigern, die die Werte 0, 1, ..., n durchlaufen. Über beide Arten von Zeigern wird summiert, wie es in dem absoluten Differenzialkalkül üblich ist.

mit

$$(8^*) \quad \Pi_{\lambda\mu}^\nu = \Gamma_{\lambda\mu}^\nu - \frac{\delta_\lambda^\nu}{n+1} \Gamma_{\alpha\mu}^\alpha - \frac{\delta_\mu^\nu}{n+1} \Gamma_{\alpha\lambda}^\alpha,$$

wo $\mathfrak{B}_{\lambda\mu\omega}^\nu$ den äquiprojektiven „Krümmungstensor“ bezeichnet,

$$\mathfrak{B}_{\lambda\mu\omega}^\nu = \frac{\partial}{\partial x^\omega} \Pi_{\lambda\mu}^\nu - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Pi_{\lambda\omega}^\nu + \Pi_{\alpha\omega}^\nu \Pi_{\lambda\mu}^\alpha - \Pi_{\alpha\mu}^\nu \Pi_{\lambda\omega}^\alpha.$$

2. Wir setzen eine nichtsymmetrische Übertragung mit den Koeffizienten $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu \neq \Gamma_{\mu\lambda}^\nu$ voraus und schreiben

$$(1) \quad \Phi_{\lambda\mu}^\nu = \Gamma_{\lambda\mu}^\nu + \frac{1}{n^2-1} [\delta_\lambda^\nu (\Gamma_{\mu\alpha}^\alpha - n \Gamma_{\alpha\mu}^\alpha) + \delta_\mu^\nu (\Gamma_{\alpha\lambda}^\alpha - n \Gamma_{\lambda\alpha}^\alpha)],$$

so daß im Falle der symmetrischen Übertragung $\Phi_{\lambda\mu}^\nu = \Pi_{\lambda\mu}^\nu$ ist.

Die $\Phi_{\lambda\mu}^\nu$ sind bei der Transformation

$$(2) \quad {}'\Gamma_{\lambda\mu}^\nu = \Gamma_{\lambda\mu}^\nu + p_\lambda \delta_\mu^\nu + q_\mu \delta_\lambda^\nu \quad (p_\mu, q_\mu \text{ beliebige Vektoren}),$$

welche die geodätischen Linien invariant läßt, invariant. Ist g eine relative Invariante gegenüber (1^*) , $\bar{g} = \Delta g$, und schreibt man $\gamma_\mu = \frac{1}{n+1} \frac{\partial \log g}{\partial x^\mu}$, so transformieren sich die Koeffizienten

$$(3) \quad \Psi_{\lambda\mu}^\nu = \Phi_{\lambda\mu}^\nu + \delta_\lambda^\nu \gamma_\mu + \delta_\mu^\nu \gamma_\lambda$$

bei (1^*) in der Weise wie $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$, und man könnte sie als Koeffizienten einer affinen Übertragung betrachten, die dieselben geodätischen Linien als die ursprüngliche Übertragung besitzt, aber von der Wahl der Vektoren p_μ, q_μ unabhängig ist[†].

Führt man die Abkürzungen

$$P_j^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}, \quad Q_j^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}, \quad Q_{jk}^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}$$

ein, so ist bei (3^*)

$$(4) \quad P_0^i = Q_0^i = \delta_0^i, \quad P_\lambda^0 = -\frac{\partial \log \Delta}{\partial x^\lambda} = -\Delta_\lambda, \quad Q_\lambda^0 = Q_\lambda^\alpha \Delta_\alpha,$$

während im allgemeinen $P_\lambda^\nu, Q_\lambda^\nu \neq 0$ ist. Aus (4) folgt nach (11*)

$$(5) \quad \begin{aligned} \text{a) } {}^*\Gamma_{00}^\nu &= Q_0^\alpha Q_0^b P_c^0 {}^*\Gamma_{ab}^c + Q_{00}^c P_c^0 = P_c^0 {}^*\Gamma_{00}^c = {}^*\Gamma_{00}^0 - \Delta_\lambda {}^*\Gamma_{00}^\lambda, \\ \text{b) } {}^*\bar{\Gamma}_{00}^\nu &= Q_0^\alpha Q_0^b P_c^\nu {}^*\Gamma_{ab}^c + Q_{00}^c P_c^\nu = P_\lambda^\nu {}^*\Gamma_{00}^\lambda. \end{aligned}$$

Setzt man also ${}^*\Gamma_{00}^\nu = 0$, was nach (5b) eine — von der Wahl der Urvariablen unabhängige und deswegen — zulässige Forderung darstellt, so

[†] Diese Übertragung wird in meiner Mitteilung „Sur les déplacements isohodologiques“ im „Enseignement Mathématique“ (XXVI, Nr. 1–3, S. 84–97) näher studiert.

ist ${}^*\Gamma_{00}^0$ eine Invariante:

$$(6) \quad {}^*\bar{\Gamma}_{00}^\nu = {}^*\Gamma_{00}^\nu = 0, \quad {}^*\bar{\Gamma}_{00}^0 = {}^*\Gamma_{00}^0.$$

Weiter ist

$$(7) \quad \begin{aligned} {}^*\bar{\Gamma}_{0\mu}^\nu &= Q_0^a Q_\mu^b P_c^\nu {}^*\Gamma_{ab}^c + Q_{0\mu}^c P_c^\nu - Q_\mu^b P_\lambda^\nu {}^*\Gamma_{0b}^\lambda = Q_\mu^e P_\lambda^\nu {}^*\Gamma_{0e}^\lambda, \\ {}^*\bar{\Gamma}_{\mu 0}^\nu &= Q_\mu^a Q_0^b P_c^\nu {}^*\Gamma_{ab}^c + Q_{\mu 0}^c P_c^\nu = Q_\mu^a P_\lambda^\nu {}^*\Gamma_{a0}^\lambda = Q_\mu^e P_\lambda^\nu {}^*\Gamma_{e0}^\lambda. \end{aligned}$$

Daraus erhellt, daß

$$(8) \quad {}^*\Gamma_{0\mu}^\nu = {}^*\Gamma_{\mu 0}^\nu = -\frac{\delta_\mu^\nu}{n+1}$$

eine in bezug auf die Wahl der Urvariablen invariante Forderung darstellt. Für ${}^*\Gamma_{0\lambda}^0$ bekommt man die Transformationsformel

$$(9) \quad \begin{aligned} {}^*\bar{\Gamma}_{0\lambda}^0 &= Q_0^a Q_\lambda^b P_c^0 {}^*\Gamma_{ab}^c + Q_{0\lambda}^e P_c^0 \\ &= Q_\lambda^b P_c^0 {}^*\Gamma_{0b}^c = Q_\lambda^\mu \left({}^*\Gamma_{0\mu}^0 + \frac{\Delta_\mu}{n+1} \right) + Q_\lambda^0 {}^*\Gamma_{00}^0. \end{aligned}$$

Die Forderung ${}^*\Gamma_{0\lambda}^0 = 0$ ist im allgemeinen nicht gegenüber der Wahl der Variablen invariant. Setzt man aber

$$(10) \quad {}^*\Gamma_{00}^0 = 0,$$

was nach (6) immer erlaubt ist, so kann man fordern:

$${}^*\Gamma_{0\lambda}^0 = \frac{1}{n+1} \frac{\partial \log m}{\partial x^\lambda} = \mu_\lambda,$$

wenn m eine relative Invariante ist, die sich wie g transformiert, da die Transformationsformel für μ_λ

$$\bar{\mu}_\lambda = Q_\lambda^a \left(\mu_a + \frac{\Delta_a}{n+1} \right)$$

lautet. Nach dem Kleinschen Prinzip kann man die Invariante m mit „eichen“:

$$m = mg \quad (m = \text{skalare Funktion}),$$

so daß schließlich

$$(11) \quad {}^*\Gamma_{0\lambda}^0 = \gamma_\lambda + m_\lambda \quad \left(m_\lambda = \frac{1}{n+1} \frac{\partial \log m}{\partial x^\lambda} \right)$$

wird. In derselben Weise bekommt man

$$(12) \quad {}^*\Gamma_{\lambda 0}^0 = \gamma_\lambda + l_\lambda \quad (l_\lambda = \text{Gradientvektor}).$$

Es ist zu beachten, daß ${}^*\Gamma_{0\lambda}^0 - {}^*\Gamma_{\lambda 0}^0$ einen kovarianten Vektor darstellt. ${}^*\Gamma_{0\lambda}^0$ und ${}^*\Gamma_{\lambda 0}^0$ sind bei $\Delta = \text{konst.}$ auch kovariante Vektoren, und die Differenz ${}^*\Gamma_{0\lambda}^0 - {}^*\Gamma_{\lambda 0}^0$ kann, unabhängig von Δ , gleich Null gesetzt werden.

Aus (11*) und (6), (8), (11), (12) entspringt gleich

$$(13) \quad \begin{aligned} {}^*\bar{\Gamma}_{\lambda\mu}^\nu &= Q_\lambda^\alpha Q_\mu^b P_c^\nu {}^*\Gamma_{ab}^c + Q_{\lambda\mu}^c P_c^\nu \\ &= Q_\lambda^\alpha Q_\mu^\beta P_\gamma^\nu {}^*\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma + Q_{\lambda\mu}^\alpha P_\alpha^\nu - \frac{1}{n+1} \Delta_\alpha (Q_\lambda^\alpha \delta_\mu^\nu + Q_\mu^\alpha \delta_\lambda^\nu), \end{aligned}$$

und ${}^*\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$ transformiert sich wie $\Phi_{\lambda\mu}^\nu$. Man kann also fordern

$$(14) \quad {}^*\Gamma_{\lambda\mu}^\nu = \Phi_{\lambda\mu}^\nu.$$

Es bleibt uns noch die Transformationsweise der Koeffizienten ${}^*\Gamma_{\lambda\mu}^0$ zu untersuchen. Es ist

$$\begin{aligned} {}^*\bar{\Gamma}_{\lambda\mu}^0 &= Q_\lambda^\alpha Q_\mu^b P_c^0 {}^*\Gamma_{ab}^c + Q_{\lambda\mu}^c P_c^0 \\ &= Q_\lambda^\alpha Q_\mu^\kappa \left[{}^*\Gamma_{\varrho\kappa}^0 + \Delta_\varrho {}^*\Gamma_{0\kappa}^0 + \Delta_\kappa {}^*\Gamma_{\varrho 0}^0 + 2 \frac{\Delta_\varrho \Delta_\kappa}{n+1} - \Delta_\alpha {}^*\Gamma_{\varrho\kappa}^\alpha + \frac{\partial \Delta_\varrho}{\partial x^\kappa} \right] \end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{aligned} {}^*\bar{\Gamma}_{\lambda\mu}^0 &= Q_\lambda^\alpha Q_\mu^\kappa \left[{}^*\Gamma_{\varrho\kappa}^0 + (\Delta_\varrho \gamma_\kappa + \Delta_\kappa \gamma_\varrho) \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\Delta_\kappa \Delta_\varrho}{n+1} + \Delta_\varrho m_\kappa + \Delta_\kappa l_\varrho - \Delta_\alpha {}^*\Gamma_{\varrho\kappa}^\alpha + \frac{\partial \Delta_\varrho}{\partial x^\kappa} \right]. \end{aligned}$$

Führt man n^2 Funktionen $\pi_{\mu\lambda}$ ein:

$$\pi_{\mu\lambda} = -\frac{\partial}{\partial x^\mu} \gamma_\lambda - \Phi_{\lambda\mu}^\alpha \gamma_\alpha + \gamma_\mu m_\lambda + \gamma_\lambda l_\mu,$$

so erkennt man leicht, daß sich

$$P_{\lambda\mu} + (n+1)\pi_{\lambda\mu} \quad (P_{\lambda\mu} = \text{beliebiger Affinor})$$

gerade so transformieren wie ${}^*\Gamma_{\lambda\mu}^0$. Die Forderung

$$(15) \quad {}^*\Gamma_{\lambda\mu}^0 = P_{\lambda\mu} + (n+1)\pi_{\lambda\mu}$$

ist also von der Wahl der Urvariablen unabhängig. Diese Gleichung kann man noch anders schreiben. Führt man die Größen

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu\omega}^\nu &= \frac{\partial}{\partial x^\omega} \Psi_{\lambda\mu}^\nu - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Psi_{\lambda\omega}^\nu + \Psi_{\alpha\omega}^\nu \Psi_{\lambda\mu}^\alpha - \Psi_{\alpha\mu}^\nu \Psi_{\lambda\omega}^\alpha, \\ S_{\lambda\mu}^\nu &= \frac{1}{2} (\Psi_{\lambda\mu}^\nu - \Psi_{\mu\lambda}^\nu) = \frac{1}{2} (\Phi_{\lambda\mu}^\nu - \Phi_{\mu\lambda}^\nu) \end{aligned}$$

und die Koeffizienten

$$\begin{aligned} \varrho_{\lambda\mu\omega}^\nu &= \frac{\partial}{\partial x^\omega} \Phi_{\lambda\mu}^\nu - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Phi_{\lambda\omega}^\nu + \Phi_{\alpha\omega}^\nu \Phi_{\lambda\mu}^\alpha - \Phi_{\alpha\mu}^\nu \Phi_{\lambda\omega}^\alpha, \\ \gamma_{\mu\lambda} &= \pi_{\mu\lambda} - \gamma_\mu \gamma_\lambda - \gamma_\mu m_\lambda - \gamma_\lambda l_\mu \end{aligned}$$

ein, so ergibt sich

$$(16) \quad R_{\lambda\mu\omega}^\nu = \varrho_{\lambda\mu\omega}^\nu - \delta_\omega^\nu \gamma_{\mu\lambda} + \delta_\mu^\nu \gamma_{\omega\lambda} - 2S_{\omega\mu}^\nu \gamma_\lambda.$$

Weil $S_{\alpha\mu}^{\alpha} = 0$, entspringt aus (16)

$$R_{\lambda\mu} = R_{\lambda\mu\alpha}^{\alpha} - Q_{\lambda\mu\alpha}^{\alpha} - (n-1)\gamma_{\mu\lambda}.$$

Setzt man also für $P_{\lambda\mu}$

$$P_{\lambda\mu} = \frac{n+1}{n-1} R_{\mu\lambda}$$

ein, so bekommt man aus (15)

$${}^*\Gamma_{\lambda\mu}^0 = \frac{n+1}{n-1} Q_{\mu\lambda\alpha}^{\alpha} + (n+1)(\gamma_{\mu}\gamma_{\lambda} + \gamma_{\lambda}m_{\mu} + \gamma_{\mu}l_{\lambda}).$$

Für $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} = \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}$, $m_{\lambda} = l_{\lambda} = 0$ geht diese Formel in

$${}^*\bar{\Gamma}_{\lambda\mu}^0 = \frac{n+1}{n-1} \mathfrak{B}_{\lambda\mu\sigma}^{\sigma} + (n+1)\gamma_{\mu}\gamma_{\lambda}$$

über.

3. Das Endergebnis kann man folgendermaßen formulieren:

Die allgemeine Thomassche Übertragung hat die Koeffizienten

$${}^*\bar{\Gamma}_{00}^0 = 0, \quad {}^*\Gamma_{00}^{\nu} = 0, \quad {}^*\Gamma_{0\mu}^0 = \gamma_{\mu} + m_{\mu}, \quad {}^*\Gamma_{\mu 0}^0 = \gamma_{\mu} + l_{\mu},$$

$${}^*\bar{\Gamma}_{0\mu}^{\nu} = {}^*\Gamma_{\mu 0}^{\nu} = -\frac{\delta_{\mu}^{\nu}}{n+1}, \quad {}^*\Gamma_{\lambda\mu}^0 = P_{\lambda\mu} + (n+1)\pi_{\lambda\mu}, \quad {}^*\bar{\Gamma}_{\lambda\mu}^{\nu} = \Phi_{\lambda\mu}^{\nu}.$$

Diese Gleichungen — mit Ausnahme der ersten — können im Falle $\Delta = \text{konst. mit } (9^*) \text{ übereinstimmen}$. Dann ist nämlich γ_{λ} ein Vektor, und man kann ihn gleich Null setzen. Setzt man dann auch $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} = \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}$, $l_{\mu} = m_{\mu} = 0$, $P_{\lambda\mu} = \frac{n+1}{n-1} R_{\mu\lambda}$ voraus, so ergeben sich die Formeln $(9^*)^{\dagger}$.

Prag, Math. Seminar der Karls-Universität, Juni 1927.

(Eingegangen am 20. Juni 1927.)

[†] Zusatz bei der Korrektur am 18. November 1927: Setzt man statt (10) in (9) ${}^*\Gamma_{00}^0 = \frac{-1}{n+1}$ ein, so ist ${}^*\Gamma_{00}^0$ ein kovarianter Vektor, der in der — im Titel zitierten — Arbeit gleich Null gesetzt wird. Darauf hat mich Herr Thomas freundlichst aufmerksam gemacht.

Über die Partialsummen der Binomialreihe.

Von

Otto Szász in Frankfurt a. M.

1. In der Theorie der Fourierschen Reihen spielt nach Arbeiten der Herren M. Riesz* und L. Fejér** eine Abschätzung der Partialsummen der Reihe

$$(1) \quad (1-z)^{-\varrho} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{\nu} z^{\nu} = 1 + \varrho z + \dots + \frac{\varrho(\varrho+1)\dots(\varrho+\nu-1)}{\nu!} z^{\nu} + \dots,$$

$$0 < \varrho \leq 1$$

eine besondere Rolle. In der von Herrn Szegő*** gegebenen verschärften Gestalt ist für $0 < \varrho \leq 1$

$$(2) \quad \left| \sum_{\nu=0}^n \gamma_{\nu} z^{\nu} \right| |1-z|^{\varrho} \leq 2, \quad |z| = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Man kann sogar der Herleitung des Herrn Szegő† leicht die schärfere Ungleichung entnehmen:

$$\left| (1-z)^{\varrho} \sum_{\nu=0}^n \gamma_{\nu} z^{\nu} - 1 \right| \leq z^{n+1}, \quad |z| \leq 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Nach Herrn Szegő†† ist ferner für $\varrho > 1$

$$(3) \quad \left| \sum_{\nu=0}^n \gamma_{\nu} z^{\nu} \right| |1-z|^{\varrho} < H_1 n^{\varrho-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

wobei H_1 (und später H_2) nur von ϱ abhängt.

* M. Riesz, Sur la sommation des séries de Fourier, Acta Litt. ac Scient. Szeged, 1 (1923), S. 104–113.

** L. Fejér, a) Über die Summabilität der Laplaceschen Reihe durch arithmetische Mittel, Math. Zeitschr. 24 (1925), S. 267–284; b) Abschätzungen für die Legendreschen und verwandte Polynome, Ebenda 24, S. 285–298.

*** G. Szegő, Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn Fejér über die Legendreschen Polynome, Math. Zeitschr. 25 (1926), S. 172–187.

† A. a. O. ***, § 1.

†† A. a. O. ***, § 3.

In (2) kann der Exponent ϱ durch keinen kleineren ersetzt werden, wie aus der Beziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^n \gamma_v z^v = (1-z)^{-\varrho}, \quad 0 < z < 1,$$

oder durch Einsetzen von $z = 1 - \frac{1}{n}$ ($n > 0$) leicht folgt.

In (3) kann zwar $n^{\varrho-1}$ durch keine niedrigere Potenz von n ersetzt werden, es wird sich aber auf kurzem, elementarem Wege ergeben, daß man $|1-z|$ statt $|1-z|^{\varrho}$ schreiben darf; dies ist im Hinblick auf die Stelle $z=1$ von Bedeutung.

2. Ich beweise gleich den allgemeineren

Satz 1. *Es sei $0 \leq a_{v-1} \leq a_v$ ($v = 1, 2, \dots, n$); dann ist*

$$(4) \quad |1-z| \left| \sum_{v=0}^n a_v z^v \right| \leq 2 a_n, \quad |z| \leq 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

In der Tat ist zunächst

$$(1-z) \sum_{v=0}^n a_v z^v = a_0 + \sum_{v=1}^n (a_v - a_{v-1}) z^v - a_n z^{n+1},$$

und hieraus für $|z| \leq 1$

$$|1-z| \left| \sum_{v=0}^n a_v z^v \right| \leq a_0 + \sum_{v=1}^n (a_v - a_{v-1}) + a_n = 2 a_n. \quad \text{Qu. e. d.}$$

Für $\varrho > 1$ folgt hieraus unter Hinzunahme einer bekannten Ungleichung

$$\boxed{|1-z| \left| \sum_{v=0}^n \gamma_v z^v \right| \leq 2 \gamma_n < H_2 n^{\varrho-1}}.$$

3. Um nichts vorauszusetzen, gebe ich einen Beweis der Ungleichung

$$2 \gamma_n < H_2 n^{\varrho-1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

sogar mit $H_2 = 2e\varrho$. Ich beweise dazu den allgemeineren*

Satz 2. *Es sei $p_v \geq 0$ ($v = 0, 1, 2, \dots$), $\sum_{v=0}^{\infty} p_v x^v$ konvergent für $0 < x < 1$, und*

$$(5) \quad \sum_{v=0}^{\infty} p_v x^v \leq (1-x)^{-\alpha}, \quad \alpha > 0;$$

dann ist

$$(6) \quad \sum_{v=0}^n p_v \leq \frac{(\alpha+n)^{\alpha+n}}{\alpha^{\alpha} n^{\alpha}} \quad (n = 1, 2, \dots);$$

Gleichheit gilt hier nur für

$$(7) \quad \sum_{v=0}^{\infty} p_v x^v = \frac{(\alpha+n)^{\alpha+n}}{\alpha^{\alpha} n^{\alpha}} x^n.$$

* Vgl. auch G. H. Hardy, Proc. Cambridge Phil. Soc. 23 (1927), S. 678.

Aus (5) folgt nämlich für $x = 1 - \frac{\alpha}{\alpha+n}$

$$\sum_{\nu=0}^n p_{\nu} \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha+n}\right)^{\nu} \leq \left(\frac{\alpha}{\alpha+n}\right)^{-\alpha},$$

also auch

$$\left(1 - \frac{\alpha}{\alpha+n}\right)^n \cdot \sum_0^n p_{\nu} \leq \left(\frac{\alpha}{\alpha+n}\right)^{-\alpha};$$

das heißt es gilt (6); Gleichheit gilt offenbar nur im Falle (7), und die Bedingung (5) ist durch das Polynom (7) erfüllt, wie man sofort bestätigt.

Setzt man nun

$$\sum_0^{\infty} p_{\nu} x^{\nu} = (1-x)^{-(\varrho-1)}, \quad \varrho > 1,$$

so ist offenbar $\sum_0^n p_{\nu} = \gamma_n$, also nach Satz 2

$$\gamma_n < \left(\frac{\varrho-1+n}{n}\right)^n \left(\frac{\varrho-1+n}{\varrho-1}\right)^{\varrho-1} < e^{\varrho-1} n^{\varrho-1} \left(\frac{\varrho}{\varrho-1}\right)^{\varrho-1}.$$

Es ist genauer

$$\frac{(\varrho-1+n)^{\varrho-1+n}}{(\varrho-1)^{\varrho-1} n^{\varrho-1+n}} \leq \frac{\varrho^{\varrho}}{(\varrho-1)^{\varrho-1}} < e \varrho,$$

also

$$\boxed{\gamma_n < e \varrho n^{\varrho-1}}.$$

Qu. e. d.

Zusatz. Die genaue Schranke für p_n unter den Voraussetzungen des Satzes 2 ist offenbar gleichfalls $\frac{(a+n)^{\alpha+n}}{\alpha^{\alpha} n^n}$.

(Eingegangen am 12. Juli 1927.)

Topologische Fragen der Differentialgeometrie. I.

Thomsens Sechseckgewebe. Zueinander diagonale Netze.

Von

Wilhelm Blaschke in Hamburg.

1. In einer Ebene sei eine Kreisscheibe von einem System von Kurven überdeckt, die topologisches (d. h. eineindeutiges und umkehrbar stetiges) Abbild eines Büschels paralleler Geraden sind. Wir wollen dann von einer „Schar von Kurven“ sprechen. Ist dieselbe Kreisscheibe von zwei solchen Kurvenscharen derart bedeckt, daß jede Kurve der einen mit jeder der anderen höchstens einen Punkt gemein hat, so wollen wir den Inbegriff der beiden Scharen als „Netz“ benennen.

Jedes Netz läßt sich durch eine topologische Abbildung so umformen, daß beide Scharen des Netzes gleichzeitig in Parallelenbüschel übergehen. Sind nämlich $u(x, y) = \text{konst.}$, $v(x, y) = \text{konst.}$ die beiden Scharen, so leistet die Abbildung

$$x^* = u(x, y), \quad y^* = v(x, y)$$

das Gewünschte.

Drei Kurvenscharen in derselben Kreisscheibe, von denen je zwei ein Netz bilden, sollen kurz ein „Gewebe“ heißen. Man kann folgendermaßen

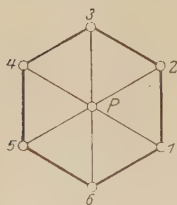


Fig. 1.

leicht einsehen, daß es im allgemeinen nicht möglich ist, die drei Kurvenscharen eines Gewebes gleichzeitig durch eine topologische Abbildung in Parallelenbüschel überzuführen. Bei einem solchen Gewebe von Parallelenbüscheln können wir nämlich durch eine affine Umformung erreichen, daß je zwei Geraden verschiedener Scharen unter $\pi:3$ gegeneinander geneigt sind. Ziehen wir dann (Fig. 1) durch einen Punkt P die drei Gewebekurven (Geraden) und dann von einem beliebigen, P genügend nahen Punkt 1 auf einer dieser Kurven ausgehend ein Sechseck 1, 2, 3, 4, 5, 6 aus

Systemkurven, das seine Ecken auf den drei Systemkurven durch P hat, so entsteht ein regelmäßiges, also sicher *geschlossenes* Sechseck. Diese Geschlossenheit der Sechsecke aus Gewebekurven mit drei Gewebediagonalen (Verbindungslinien der Gegenecken) durch denselben Punkt P ist somit sicher eine notwendige Bedingung für die Überführbarkeit in ein Gewebe paralleler Geraden. Wir wollen ein Gewebe, das aus drei verschiedenen Büscheln paralleler Geraden besteht, oder ein topologisch gleichwertiges, ein „*Sechseckgewebe*“ nennen.

Die Erklärung der Sechseckgewebe kann auch so ausgesprochen werden, daß sich die Kurvgleichungen der drei Scharen $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y) = \text{konst.}$ so wählen lassen, daß identisch in x, y

$$u(x, y) + v(x, y) + w(x, y) = 0$$

wird.

Herr G. Thomsen¹⁾ hat nun gezeigt, daß die gefundene Bedingung auch hinreicht, daß also folgender Satz gilt:

(A). *Die Geschlossenheit der Gewebesechsecke ist notwendig und hinreichend für die topologische Überführbarkeit eines Gewebes in ein Gewebe aus drei Büscheln paralleler Geraden, also kennzeichnend für Sechseckgewebe.*

Für diesen Satz (A) möchte ich hier zunächst einen neuen Beweis mitteilen, der aus Gesprächen entstanden ist, die Herr Thomsen und ich Ende März 1927 auf dem Posillipp bei Neapel geführt haben. Dieser neue Beweis wird länger sein als der alte, aber diesem Nachteil steht der Vorteil gegenüber, daß keine einschränkenden Differenzierbarkeitsannahmen zu machen sind und nicht gerechnet zu werden braucht. Man sieht also vielleicht mehr in das Wesentliche des Beweises hinein, und das Verfahren kann leicht auf verwandte Fragestellungen übertragen werden, von denen ich in § 2 ein Beispiel erbringe. Es sei noch erwähnt, daß Thomsens Satz (A) mit einem schönen Ergebnis von Graf und Sauer²⁾ zusammenhängt.

Was hier für die ebene Geometrie behandelt ist, gilt ebenso für die Geometrie auf einer Fläche, die topologisches Abbild eines Gebiets der Ebene ist.

Wenn ich es wage, die folgenden sehr elementaren Untersuchungen drucken zu lassen, so tue ich es in der Hoffnung, für die Behandlung der zahlreichen sich darbietenden verwandten Fragen Mitarbeiter zu gewinnen.

¹⁾ G. Thomsen, Un teorema topologico..., Bollettino dell' Unione Matematica Italiana **6** (1927), S. 80–85.

²⁾ H. Graf und R. Sauer, Über dreifache Geradensysteme in der Ebene..., Münchener Berichte **54** (1924), S. 119–156.

§ 1.

Beweis von Thomsons Satz über Sechseckgewebe.

2. Ist die Forderung in (A) erfüllt, so behaupten wir: (I) *Man kann ein System von Gewebesechsecken wie eine Bienenwabe (Fig. 2) nebeneinander bauen.* Sind nämlich 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 1, 7, 8, 9, 10, 2 zwei Gewebesechsecke mit den Diagonalschnittpunkten P, Q , die die Seite 1, 2 gemein haben, so schneiden sich die Verlängerungen der Seiten 5, 6; 2, 1 und 8, 7 in demselben Punkt R . Dies erkennt man durch Betrachtung des Gewebesechsecks mit 1 als Diagonalschnitt und P als Ecke.

Wir können somit die Ecken 1, 2, 3, ..., und die Diagonalschnittpunkte $P, Q, R, \dots$ unsrer Wabe auf die entsprechenden Punkte einer

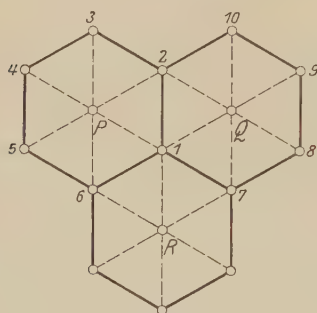


Fig. 2.

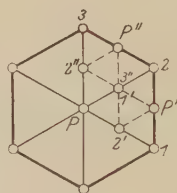


Fig. 3.

regelmäßigen Wabe aus lauter regelmäßigen Sechsecken abbilden und gehen darauf aus, diese Abbildung so zu vervollständigen, daß sie auf „alle“ Punkte ausgedehnt wird.

3. Zu dem Ende zeigen wir: (II) *Man kann unsere Wabe in eine feinmaschigere Gewebewabe unterteilen (Fig. 3).* Dazu ist zu zeigen: (II₁) Jedem Gewebedreieck wie $P, 1, 2$ läßt sich auf genau eine Art ein Gewebedreieck $P', 1', 2'$ einschreiben. Ferner: (II₂) Diese eingeschriebenen Dreiecke schließen sich so aneinander, daß auf jeder Seite wie $P, 2$ nur eine neue Ecke $1' = 3''$ (Fig. 3) auftritt.

Um die Behauptung (II₁) zu begründen, lassen wir auf den festen Seiten $P, 1$ (etwa $v = 0$) und $P, 2$ (etwa $u = 0$) des Dreiecks $P, 1, 2$ die Punkte $2'$ und $1'$ von P aus so wandern, daß in $2'$ und $1'$ immer w denselben Wert hat und w etwa von dem Wert Null in P aus wächst. Dann finden wir als Durchschnitt $P'(w)$ der Linien $u = \text{konst}$ durch $2'$ und $v = \text{konst}$ durch $1'$ einen Punkt, der sich stetig mit w ändert und, wenn in 1 und 2 etwa $w = 1$ wird, für $0 < w < 1$ stetig von P nach Q wandert innerhalb des Vierecks $P, 1, Q, 2$ (Fig. 2), somit mindestens ein-

mal die Seite 1, 2 überschreitet. Daß es aber nicht zwei verschiedene Schnittpunkte P' und P'_0 geben kann, folgt sofort aus der Figur 4 wegen der Anordnung der zugehörigen Punkte $1', 2'$ und $1'_0, 2'_0$ auf $P, 2$ und $P, 1$.

(II₂) ergibt sich ganz einfach aus der Sechseckgeschlossenheit, angewandt auf das Gewebesechseck in Fig. 3 mit dem Diagonalschnitt $1'$ und der Ecke P .

Jedes Dreieck wie $P, 1, 2$ der ursprünglichen Wabe trägt jetzt vier Dreiecke mit den Ecken $P, 1, 2$; $P', 1', 2'$ der unterteilten Wabe. Entsprechend unterteilen wir unsere regelmäßige Wabe und ordnen die neu entstandenen gestrichenen Ecken einander zu.

4. (III) *Führt man mit dieser Unterteilung fort, so erhält man in der Grenze die gewünschte topologische Abbildung des gegebenen Gewebes auf ein regelmäßiges gradliniges.*

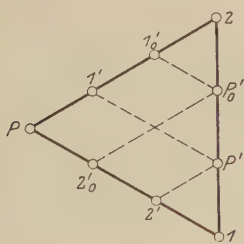


Fig. 4.

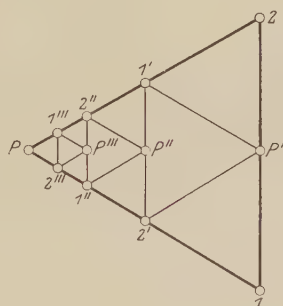


Fig. 5.

Dazu ist wegen der Erhaltung der Anordnung (Monotonie) nur einzusehen, daß die neu entstehenden Ecken beispielsweise die Seite $P, 1$ ($v = 0$) *dicht* bedecken. Dazu zeigen wir zunächst:

(III₁) *P ist Häufungspunkt von Ecken auf P, 1.*

Wir brauchen dies nur von den Ecken $1, 2', 1'', 2''', \dots$ der Folge von Gewebedreiecken $P, 1, 2$; $P', 1', 2'$; $P'', 1'', 2''$, ... in Fig. 5 zu zeigen. Aus der Betrachtung der in Nr. 3 eingeführten stetigen Kurve $P'(w)$ geht hervor, daß für die u -Werte zweier aufeinander folgender Stellen wie 1 und $2'$ oder $2'$ und $1''$ gilt

$$u_{k+1} = f(u_k),$$

worin f stetig ist und für $u > 0$ stets $f(u) < u$ ist. Aus der Monotonie der positiven u_k folgt das Vorhandensein von $\lim u_k = u_\infty \geq 0$. Ferner folgt durch Grenzübergang wegen der Stetigkeit von f

$$u_\infty = f(u_\infty),$$

also wegen $f(u) < u$ für $u > 0$ notwendig $u_\infty = 0$. Damit ist (III₁) bewiesen.

5. Zum Nachweis von (III) ist noch zu zeigen: (III₂) *Jeder Punkt von $P, 1$ ist Eckenhäufungspunkt.*

Ziehen wir durch einen der Punkte 2, 1', 2'', 1''', ... auf $u = 0$ die „parallele“ Gewebelinie $v = v_k$ zur Gewebelinie $P, 1$! Gehen wir dann, von einer „Ecke“ auf $P, 1$ ausgehend, zwischen den beiden „Parallelen“ im Zickzack, d. h. abwechselnd auf Linien $w, u = \text{konst.}$ weiter (Fig. 6), so kommen wir immer wieder zu Ecken auf $v = 0$. In jedem Gewebedreieck, wie das in Fig. 6 schraffierte, das eine Ecke auf $v = v_k$ und eine

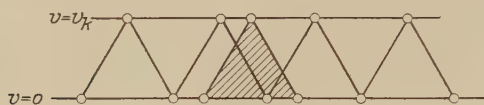


Fig. 6.

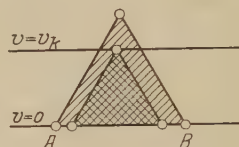


Fig. 7.

Seite auf $v = 0$ hat, liegt mindestens eine dieser Ecken auf $v = 0$. Blicke nun eine Strecke AB von $v = 0$ eckenfrei, so können wir (Fig. 7) darüber das Dreieck $u = u(A)$, $w = w(B)$ konstruieren und könnten wegen $\lim v_k = 0$ die Zahl k so groß wählen, daß die Kurve $v = v_k$ in dieses Dreieck eindringt. Die Betrachtung jedes innerhalb dieses Dreiecks liegenden Gewebedreiecks mit einer Ecke auf $v = v_k$ und der Gegenseite auf $v = 0$ führt dann zu einem Widerspruch.

Damit ist der Beweis von (A) beendet.

§ 2.

Zueinander diagonale Kurvennetze.

6. Nehmen wir jetzt in der Ausdrucksweise von Nr. 1 in derselben Kreisscheibe vier Kurvenscharen an, von denen irgend zwei ein Netz bilden mögen. Von den entstehenden drei Paaren von Netzen soll eines N_1, N_2 folgende Eigenschaften haben:

Jedes Netzviereck aus N_1 mit einer Diagonale aus N_2 soll noch eine zweite Diagonale aus N_2 besitzen. Dann heiße das Netz N_2 zum Netz N_1 diagonal.

Wir wollen zeigen:

(B) *Wenn das Netz N_2 zum Netz N_1 diagonal ist, so können wir durch eine topologische Abbildung beide Netze gleichzeitig in geradlinige Parallelogrammnetze überführen.*

Sind also

$$N_1 \begin{cases} u_1(x, y) = \text{konst.}, \\ v_1(x, y) = \text{konst.}, \end{cases} \quad N_2 \begin{cases} u_2(x, y) = \text{konst.}, \\ v_2(x, y) = \text{konst.} \end{cases}$$

die Kurven der beiden Netze, so können wir, wenn N_2 zu N_1 diagonal ist, die vier Funktionen u, v so wählen, daß identisch in x, y gilt

$$u_2 = u_1 + v_1, \quad v_2 = u_1 - v_1.$$

In (B) wird auch enthalten sein: (IV) *Ist N_2 diagonal zu N_1 , so auch umgekehrt N_1 zu N_2 , d. h. die Beziehung ist symmetrisch.*

7. Zum Beweise von (B), bei dem ich mich auf eine mündliche Mitteilung von Herrn K. Brauner stützen werde, sei zunächst bemerkt: (V) *Ist N_2 zu N_1 diagonal, so kann man ein Schachbrett von Vierecken aus N_1 herstellen, deren Diagonalen ein Schachbrett von N_2 -Vierecken bilden.*

Sind nämlich (Fig. 8) 1, 2, 3, 4; 1, 4, 5, 6; 1, 6, 7, 8 drei Netzvierecke aus N_1 mit Diagonalen aus N_2 , so gehen die Verlängerungen der

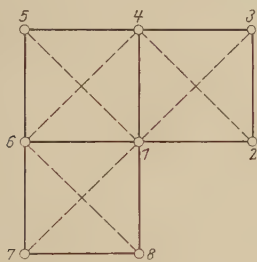


Fig. 8.

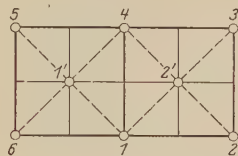


Fig. 9.

Seiten 3, 2; 5, 1; 7, 8 durch denselben Punkt 9, wie man aus der Betrachtung des Netzvierecks aus N_1 mit der Diagonale 3, 7 aus N_2 erkennt. Dadurch wird (V) bewiesen.

Die eben durchgeführte Betrachtung können wir aber auch anders wenden. Gehen wir von einem beliebigen Netzviereck 2, 4, 6, 8 von N_2 mit der Diagonale 2, 6 aus N_1 aus, konstruieren die beiden N_1 -Vierecke 1, 2, 3, 4 und 1, 4, 5, 6 mit den Diagonalen 2, 4 und 4, 6, ferner das N_1 -Viereck mit Diagonalen aus N_2 und 1, 6 als Seite, so enthält dieses nach der früheren Schlußweise die Ecke 8. Das heißt aber: N_1 ist zu N_2 diagonal. Damit ist (IV) bewiesen.

8. (VI) *Unser Schachbrett mit Feldern aus N_1 und Diagonalen aus N_2 läßt sich in eindeutiger Weise so zu einem Schachbrett derselben Art unterteilen, daß jedes Feld des alten Bretts vier neue Felder trägt.*

Dazu ist im wesentlichen nur zu zeigen: Die Diagonalschnittpunkte $1'$ und $2'$ zweier Felder 1, 4, 5, 6 und 1, 2, 3, 4 liegen auf derselben Linie des N_1 -Netzes (Fig. 9). Dies ergibt sich sofort daraus, daß das Viereck 1, $2'$, 4, $1'$ aus N_2 die Diagonale 1, 4 aus N_1 besitzt, also, da nach (IV) N_1 zu N_2 diagonal ist, auch $1', 2'$ eine Diagonale aus N_1 sein muß.

9. Es leuchtet nun wohl ein, wie man den Beweis von (B) zu Ende bringt. Man zeigt ähnlich wie in Nr. 4, 5, daß bei weitergeführter Unterteilung die Eckpunkte unseres Schachbretts überall dicht zu liegen kommen. Bildet man dann die Ecken des ursprünglichen Bretts auf die gleichangeordneten eines quadratischen Bretts ab und vervollständigt diese Abbildung mittels der Unterteilung von Nr. 8 und durch Zuordnung entsprechender Grenzpunkte, so erhält man die gewünschte Abbildung der gegebenen, zueinander diagonalen Netze auf zwei diagonale Quadratnetze.

10. Indessen kann man auch im unmittelbaren Anschluß an Nr. 7 unter Weglassung von Nr. 8 den Beweis auf § 1 zurückführen. Bauen wir vier Netzvierecke aus N_1 nach Nr. 7 nebeneinander und betrachten wir nur ihre Diagonalen der einen Schar aus N_2 , so erkennen wir aus Fig. 10, daß die zwei Scharen aus N_1 zusammen mit der einen Schar aus N_2 ein Gewebe G^* bilden, das der Forderung von (A) genügt, also auf ein Gewebe aus drei Büscheln paralleler Geraden topologisch abgebildet werden kann, von denen zwei das Parallelogramm-Netz N_1^* bilden mögen. Bemerkt man, daß in diesem geradlinigen Gewebe die fehlende geradlinige Diagonale jedes Parallelogramms aus N_1^* mit einer Diagonale aus G^* zu einer festen Richtung parallel läuft, so erkennt man: Die gefundene topologische Abbildung führt auch die bisher weggelassene Schar von N_2 in ein Parallelenbüschel über.

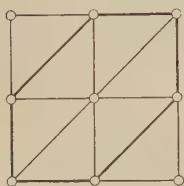


Fig. 10.

Umgekehrt kann man (A) auch aus (B) gewinnen.

11. Während wir bisher keine *einschränkenden Differenzierbarkeitsforderungen* gestellt haben, wollen wir jetzt annehmen, die auftretenden Kurvenscharen mögen stetig differenzierbar sein. Sind dann zwei Netze N_1, N_2 diagonal, so folgt aus der Betrachtung eines unendlich kleinen Netzparallelogramms aus N_1 mit Diagonalen aus N_2 , daß die zwei Richtungen von N_1 in einem Punkt durch die beiden Richtungen von N_2 durch denselben Punkt *harmonisch* geteilt werden, daß also die Netze N_1, N_2 einander „harmonisch trennen“.

Es ist umgekehrt leicht einzusehen: (VII) *Harmonische Netze sind im allgemeinen nicht diagonal zueinander.* Zunächst kann man nämlich N_1 und eine Schar aus N_2 so beliebig vorschreiben, daß sie dabei stetig differenzierbare Kurvenscharen bilden, die zusammen ein Gewebe G ausmachen. Dann brauchen wir nur zu der einen Schar von N_2 die zweite harmonisch bezüglich N_1 zu ergänzen. Das entstehende Paar harmonischer Netze wird aber sicher nicht diagonal sein, wenn G kein Sechseckgewebe ist.

12. Die erzielten Ergebnisse lassen sich, wenn wir wieder einschränkende Differenzierbarkeitsannahmen machen, auf die Flächentheorie an-

wenden und führen beispielsweise sofort zu einer einfachen geometrischen Deutung der von A. Voss³⁾ eingeführten „*rhombischen Netze*“ auf einer Fläche. So werden von Voss die Netze bezeichnet, für die, wenn man sie als Parameterlinien $u, v = \text{konst.}$ einführt, das Bogenelement ds^2 der Fläche auf die Form

$$ds^2 = E du^2 + 2 F du dv + G dv^2 \quad \text{mit} \quad E = G$$

gebracht werden kann. Als Deutung ergibt sich leicht:

Ein Kurvennetz auf einer Fläche ist immer dann rhombisch, wenn es zu seinem Halbiernetz diagonal ist.

Als „Halbiernetz“ eines gegebenen Netzes ist dabei natürlich das Netz zu verstehen, dessen Richtungen an jeder Stelle die Winkel der Netzrichtungen des gegebenen Netzes halbieren.

13. Ein anderes Ergebnis von Voss ist: *Sind die Netzlinien eines rhombischen Netzes geodätisch, so ist sein Halbiernetz Liouvillesch.* Als Liouvilletesch ist dabei ein Netz zu verstehen, bezüglich dessen das Bogenelement auf die Gestalt

$$ds^2 = (U(u) + V(v))(du^2 + dv^2)$$

gebracht werden kann. Umgekehrt ist das Netz geodätischer Linien, das den Differentialgleichungen

$$\frac{du}{\sqrt{U+C}} + \frac{dv}{\sqrt{V-C}} = 0$$

mit „beliebigem“ festen C genügt, rhombisch.

Die Bestimmung der geodätisch-rhombischen Netze auf Flächen fester Krümmung, die Voss³⁾ angegeben hat und auf die neuerdings mehrere Geometer⁴⁾ zurückgekommen sind, wird dadurch auf die bekannte Bestimmung der Liouvilleschen Bogenelemente auf diesen Flächen zurückgeführt.

Ähnliche Ergebnisse, wie sie hier für die zweidimensionale Geometrie hergeleitet wurden, haben Herr K. Brauner und ich auch für die räumliche Geometrie gefunden.

³⁾ A. Voss, Über Flächenzerlegung in infinitesimale Rhomben, Münchener Berichte 36 (1906), S. 247–296, insbesondere S. 269.

⁴⁾ Literaturangaben bei O. Volk, Über geodätische rhombische Kurvennetze ..., Heidelberger Berichte 1925, 13. Ferner H. Liebmann, Bestimmung der geodätisch-rhombischen Netze ..., Crelles Journal 158 (1927), S. 49–55. Zum erstenmal dürften geodätisch-rhombische Netze behandelt sein bei S. Finsterwalder, Mechanische Beziehungen bei der Flächendeformation, Jahresbericht D. M. V. 6 (1897), S. 56.

Funchal auf Madeira, Ende August 1927.

(Eingegangen am 29. August 1927.)

Topologische Fragen der Differentialgeometrie. II.

Achtflachgewebe.

Von

Wilhelm Blaschke in Hamburg.

Die folgende Untersuchung bildet eine Fortsetzung der in dieser Zeitschrift unter demselben Obertitel erschienenen Schrift (S. 150—157). Ich stütze mich darin wesentlich auf mündliche Mitteilungen von Herrn K. Brauner.

§ 3.

Kennzeichnung eines Achtflachgewebes.

14. Ein System von Flächen in einer Kugel, das als topologisches Abbild der Ebenen $x, y, z = \text{konst.}$ eines Systems von Parallelkoordinaten auftritt, soll kurz ein „*Flächennetz*“ heißen, das Abbild der Ebenen $x = \text{konst.}$ allein eine „*Flächenschar*“. Vier Flächenscharen, von denen je drei ein Flächennetz bilden, ergeben zusammen ein „*Flächengewebe*“. Ein solches Gewebe endlich, das aus vier Büscheln paralleler Ebenen besteht oder daraus durch eine topologische Abbildung entsteht, soll kurz ein „*Achtflachgewebe*“ genannt werden.

Es sollen hier notwendige und hinreichende Bedingungen dafür hergeleitet werden, daß ein Flächengewebe ein Achtflachgewebe ist.

15. Gehen wir von einem ebenen Achtflachgewebe aus! Die Gleichungen seiner Ebenen seien $p, q, r, t = \text{konst.}$, worin die p, q, r, t etwa folgende Linearformen der rechtwinkligen Koordinaten sind

$$\begin{aligned} p &= +x + y + z, \\ q &= +x - y - z, \\ r &= -x + y - z, \\ t &= -x - y + z \end{aligned} \tag{1}$$

mit der linearen Abhängigkeit

$$(2) \quad p + q + r + t = 0.$$

Die Benennung „Achtflachgewebe“ mag damit begründet werden, daß beispielsweise die Ebenen $p, q, r, t = \pm 1$ die Seitenflächen des regelmäßigen Achtfachs enthalten, das die Ebenen $x, y, z = 0$ zu „Diagonalebene“ und die Einheitspunkte auf den Achsen zu Ecken hat.

Die Ebenen $p, q = \text{konst.}$ schneiden sich in Geraden, die zusammen mit den Schnittgeraden $r, t = \text{konst.}$ in den Ebenen $x = \text{konst.}$ Kurvennetze bilden in der Benennung von Nr. 1. Ebenso verteilen sich die Geraden $p, r = \text{konst.}$ und $q, t = \text{konst.}$ auf Kurvennetze in den Ebenen $y = \text{konst.}$ und endlich die Geraden $p, t = \text{konst.}$ und $q, r = \text{konst.}$ auf Kurvennetze der Ebenen $z = \text{konst.}$

16. Von dieser Verteilung der Schnittlinien der Flächen eines Gewebes auf die Flächen eines Netzes wollen wir jetzt zeigen, daß sie nicht nur notwendig ist, sondern auch hinreicht für die Kennzeichnung der Achtflachgewebe: (C) *Unter den Flächengeweben sind die Achtflachgewebe dadurch gekennzeichnet, daß sich die Schnittlinien ihrer Flächen auf Kurvennetze in den drei Flächenscharen eines Flächennetzes verteilen.*

17. Zum Beweise übernehmen wir aus Nr. 15 die Benennungen der sieben Flächenscharen $p, q, r, t; x, y, z = \text{konst.}$, die also jetzt krummlinige Koordinaten bedeuten, von denen wir noch nicht wissen, daß sie in den linearen Beziehungen (1), (2) stehen. Wir wollen aber zunächst zeigen, indem wir die Benennung von Nr. 6 heranziehen: *Das Kurvennetz $y, z = \text{konst.}$ ist in jeder Fläche $x = \text{konst.}$ diagonal zu dem darin gelegenen Netz der Kurven $p, q = \text{konst.}$ und $r, t = \text{konst.}$*

Um das einzusehen, nehmen wir in der Fläche $x = x_0$ auf der Kurve $y = y_0$ zwei genügend nahe Punkte z_1, z_2 (Fig. 11). Die Flächen $p, q, r, t = \text{konst.}$ durch diese beiden Punkte bilden dann ein Achtflach mit den Diagonalfächen $x = x_0$ und $y = y_0$ und einer dritten Diagonalfäche, die wir $z = z_0$ nennen wollen. Das Netzviereck in $x = x_0$, das von den Kanten $p, q = \text{konst.}; r, t = \text{konst.}$ unseres Achtfachs gebildet wird und die Ecken $x_0, y_0, z_1; x_0, y_0, z_2$ auf der Diagonale $y = y_0$ hat, bestimmt somit auch die Diagonale $z = z_0$, und darin liegt schon die Gültigkeit unserer Behauptung.

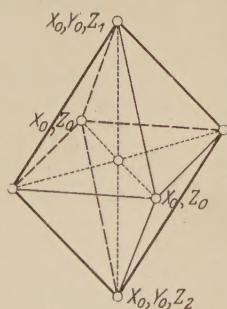


Fig. 11.

18. Jetzt läßt sich der Beweis von (C) auf Satz (B) von Nr. 6 zurückführen. Nach (B) kann man nämlich die Fläche $x = x_0$ topologisch so auf eine Ebene E abbilden, daß dabei die beiden zueinander diagonalen

Kurvennetze in diagonale, geradlinige Quadratnetze in E übergehen. Es handelt sich dann nur mehr darum, diese Abbildung von $x = x_0$ auf E in geeigneter Weise in die umgebenden Räume hinaus fortzusetzen. Dazu ordnen wir jedem Punkt x, y, z mit $x > x_0$ in der Fläche $x = x_0$ das Netzeviereck zu, das von den vier Flächen $p, q, r, t = \text{konst.}$ durch x, y, z in $x = x_0$ ausgeschnitten wird. Diesem Viereck entspricht in E ein Quadrat, dem wir in einem beliebigen der Halbräume H , die von E begrenzt werden, den Punkt P zuweisen wollen, der Ecke des regelmäßigen Achtecks ist, das die Quadratseiten zu Kanten hat. Diese Abbildung der Punkte x, y, z mit $x > x_0$ auf die Punkte P von H , die wir auf $x \leq x_0$ und den andern von E begrenzten Halbraum erweitern können, leistet das Gewünschte. Sie ist nämlich eine topologische Abbildung des Raumes, die die Flächenscharen $p, q, r, t = \text{konst.}$ in Büschel paralleler Ebenen verwandelt.

Das hier hergeleitete Ergebnis steht in Zusammenhang mit der Arbeit von R. Sauer, Die Raumeinteilungen, welche durch Ebenen erzeugt werden, von denen je vier sich in einem Punkt schneiden, Münchener Sitzungsberichte 1925, S. 41–56.

Las Palmas auf Gran Canaria, Anfang September 1927.

(Eingegangen am 12. September 1927.)

Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften

in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, gemeinsam mit **W. Blaschke**, ord. Professor der Mathematik an der Universität Hamburg, **M. Born**, ord. Professor der theoretischen Physik an der Universität Göttingen, **C. Runge**†, ord. Professor der Mathematik an der Universität Göttingen, herausgegeben von **R. Courant**, ord. Professor der Mathematik an der Universität Göttingen.

Neue Auflagen bzw. neue Bände:

Bd. V:

Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung. Mit Anwendungen auf algebraische Zahlen und Gleichungen sowie auf die Kristallographie. Von **Andreas Speiser**, ord. Professor der Mathematik an der Universität Zürich. Zweite Auflage. Mit 38 Textabbildungen. IX, 251 Seiten. 1927.

RM 15.—; gebunden RM 16.50

Bd. XVI:

Felix Klein, Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Dritte Auflage. Dritter Band: **Präzisions- und Approximationsmathematik.** Ausgearbeitet von **C. H. Müller**. Für den Druck fertig gemacht und mit Zusätzen versehen von **Fr. Seyfarth**. Mit 156 Abbildungen. X, 238 Seiten. 1928. RM 13.50; gebunden RM 15.—

Bd. XXV:

Felix Klein, Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. Teil II: **Die Grundbegriffe der Invariantentheorie und ihr Eindringen in die mathematische Physik.** Für den Druck bearbeitet von **R. Courant** und **St. Cohn-Vossen**. Mit 7 Figuren. X, 208 Seiten. 1927.

RM 12.—; gebunden RM 13.50

Teil erschien im Jahre 1926 zum Preise von RM 21.—; gebunden RM 22.50

Bd. XXVI:

Felix Klein, Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie. Für den Druck neubearbeitet von **W. Rosemann**. Mit 237 Abbildungen. XII, 326 Seiten. 1928. RM 18.—; gebunden RM 19.50

Bei der Redaktion eingegangene Schriften.

Unter dieser Rubrik veröffentlichen wir fortlaufend ein Verzeichnis derjenigen Schriften, die uns von Verlegern oder Verfassern zu diesem Zwecke übersandt werden. Wir bitten, von dieser Gelegenheit zur Bekanntmachung neuer Schriften ausgiebig Gebrauch machen zu wollen.

v. Kries, J., Die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Eine logische Untersuchung. Zweiter Abdruck. XVI, 298 S. Gr.-8°. J. C. B. Mohr (Paul Siebeck), Tübingen. 1927.

Evans, G. C., The logarithmic potential. Discontinuous Dirichlet and Neumann Problems. VIII, 150 S. Gr.-8°. American Mathematical Society, New York. 1927. (Colloquium Publications, Vol. VI.)

Frank, Ph., Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik. Zweiter (physikalischer) Teil, unter Mitarbeit von H. Faxén, R. Fürth, Th. v. Kármán, Fr. Noether, C. W. Oseen, A. Sommerfeld, E. Trefftz herausgegeben von —. XXIV, 863 S. Gr.-8°. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig. 1927.

Beck, H., Einführung in die Axiomatik der Algebra. X, 197 S. Gr.-8°. Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig. 1926. (Göschens Lehrbücherei, I. Gruppe, Band 6.)

L'Enseignement Mathématique. XXVI^e Année. Nos 1—2—3. Gr.-8°. 192 S. Gauthier-Villars et Cie, Paris, Georg et Cie, Genève. 1927.

Jeffreys, H., Operational methods in mathematical physics. (VIII, 101 S.) 8°. University Press, Cambridge. 1927. (Cambridge Tracts Nr. 23.)

Veblen, O., Invariants of quadratic differential forms. VIII, 102 S. 8°. University Press, Cambridge. 1927. (Cambridge Tracts Nr. 24.)

Dodatek do Rocznika Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Tom III. Wydano z zasilku ministerstwa wyznań religijnych i oświecenia publicznego. Kraków 1927.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, gegründet von A. L. Crelle 1826. Herausgegeben unter Mitwirkung der Herren Hasse, Schaefer, Schlesinger, Schottky von K. Hensel. Bd. 156, Heft 3 (1927). Bd. 157 (Jubiläumsband I), Heft 3. Mit Bildern von Schellbach, Kummer, Schröter und v. Helmholtz. (1927.)

Walther, O., und E. Grohnert, Das Verschwinden des Wassers von der Erdoberfläche und die Weiterentwicklung der Erde. W. Säuberlich, Berlin-Hohen Neuendorf. 23 S. 8°. 1927.

Hierzu zwei Beilagen vom Verlag Julius Springer in Berlin W 9.

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig